LE NUMERIQUE EN QUESTION

Jean DHOMBRES (Paris)

Ce travail est divisé en trois parties. La première partie tente d'organiser les réflexions d'un historien confronté à la pensée numérique en tant qu'elle pourrait faire l'histoire des mathématiques et interroge donc l'épistémologie de l'histoire des mathématiques. La deuxième partie traite une pensée numérique en calcul intégral, et la troisième partie envisage, en analyse également, un cas de sortie de la pensée numérique. Si ces parties sont connectées, leur lecture peut être indépendante.

DE L'ARITHMETISATION A LA REVENDICATION NUMERIQUE

Il est impossible de voir le nombre dans l'histoire de la pensée, et même de la seule pensée mathématique, comme le splendide déroulement d'une unique idée qui, aujourd'hui, aurait atteint son épanouissement total. Dans son *Cours de philosophie positive* de 1830, Comte a pourtant raison d'indiquer une nécessaire modification de l'ordre historique dans l'objectif de constituer un récit raisonnable.

> La tendance constante de l'esprit humain, quant à l'exposition des connaissances, est donc de substituer de plus en plus à l'ordre historique l'ordre dogmatique qui peut seul convenir à l'état perfectionné de notre intelligence[1].

Mais il aurait dû indiquer que cet état pouvait évoluer encore, donc l'intelligence se modifier, et paradoxalement l'ordre dogmatique devoir « changer ». À l'époque de la formation intellectuelle de Comte, vers 1814, année où il entrait à l'École polytechnique, le dogme du nombre n'avait guère évolué depuis l'*Arithmetica Universalis* de Newton un siècle plus tôt, de sorte que le Comte plus mature reprend simplement sur la pensée du nombre les considérations de Laplace à l'École normale de l'an III, fort proches de celles de Newton. Il existe une branche de la science générale du calcul

> qui porte aujourd'hui spécialement le nom de théorie des nombres, et qui est encore si peu avancée. Cette branche, fort étendue par sa nature, mais dont l'importance dans le système général de la science n'est pas très grande, a pour objet de découvrir les propriétés inhérentes aux différents nombres en vertu de leurs valeurs et indépendamment de toute numération particulière. Elle constitue donc une sorte d'arithmétique transcendante ; c'est à elle que conviendrait effectivement la définition proposée par Newton pour l'algèbre[2].

Renchérissant sur le dogmatisme dont Comte disait qu'il était trop naturel à la pensée humaine rationalisante qui essaie de comprendre son cheminement, Michel Serres ajoute en commentaire du commentaire que « l'erreur » de Comte sur le contenu implique son « erreur de pronostic ». Et, bien sûr, Serres nous livre un pronostic d'épistémologue normatif, intéressé par autre chose que la théorie des nombres. Ce qui fait la cacophonie : Comte « algébriserait l'arithmétique » alors qu'il aurait fallu « arithmétiser l'analyse ». Au

---

[1] A. Comte, *Cours de philosophie positive*, 2e leçon, cité d'après M. Serres, F. Dagognet, A. Sinaceur, Philosophie première, Paris, Hermann, 1975, p. 51.
[2] A. Comte, *op. cit*., p. 91.

XX^e siècle, un mathématicien, du calibre de André Weil explique tout au contraire que c'est l'algébrisation de l'arithmétique qui a le plus fait faire de progrès à la théorie des nombres[3]. Et plus directement encore, Jean-Pierre Serre indique que la première partie de l'*Arithmétique* est « purement algébrique », avec comme objectif la classification des formes quadratiques sur le corps des nombres rationnels (théorème de Hasse-Minkowski). La seconde partie est « analytique », c'est-à-dire utilise les fonctions holomorphes en théorie des nombres à partir du résultat de Dirichlet sur l'existence de nombres premiers dans une suite arithmétique, (résultat obtenu du vivant de Comte, qui n'en a pas compris l'intérêt ou l'importance). Va-t-on en déduire que, divisant ainsi en deux, l'arithméticien actuel dédaigne sa discipline, alors même qu'il intitule avec panache en 1970 un « Cours d'Arithmétique » dans la collection *Le Mathématicien*, aux Presses Universitaires de France. Il est plus intéressant de noter que l'on revient à la terminologie « arithmétique », abandonnée un long temps au profit de théorie des nombres. Ce retour est une façon de donner au numérique une place théorique, en dehors de celle que les fondements et la logique mathématique lui ont nettement conférée depuis Gödel. Si les travaux de Cantor et consorts furent d'abord rangés par les revues spécialisées sous la rubrique « Arithmétique », c'est qu'ils ne semblaient pas pouvoir être réinvestis dans d'autres domaines et étaient à juste titre compris comme relevant des fondements des mathématiques. Leur postérité a-t-elle vraiment quitté cette place ? Où pourtant placer la pensée numérique qui est évidemment à l'œuvre dans le procédé diagonal de Cantor ? Il va avoir une importance en analyse fonctionnelle et jusque dans la théorie (numérique) de l'approximation. On ne peut pas réduire cette pensée à l'arithmétique d'aujourd'hui. Peut-on aussi bien trouver dans les travaux de Gauss et Dirichlet une suite naturelle de la théorie des nombres du XVIII^e siècle, avec Euler, Lagrange, Waring, Legendre ? Parlant librement, je m'interroge sur la manière dont on peut écrire l'histoire de la pensée numérique.

On sent bien, outre la variation des dogmes sur ce qui fait progrès, le risque d'une querelle sur les seuls mots et les seules expressions ; algèbre, analyse, nombres, etc., sans que l'on tienne compte des changements historiques de sens de tels mots. Dans cette veine, et avec cette focalisation sur les mots, on constate que l'expression devenue usuelle d'*arithmétisation de l'analyse* pour décrire la fondation des nombres réels par Cantor dans les années 1870, contredit l'arithmétisation antérieure d'un Newton, qui exprimait ainsi sa propre pensée à propos de la *Methodus fluxionem*. Il assurait que la division infinie, l'écriture décimale illimitée d'un nombre, donc une représentation particulière dont Comte disait qu'il fallait apprendre à se débarrasser, le conduisit par analogie sur le chemin du calcul différentiel et intégral[4]. Leibniz avait une explication encore plus numérique de son travail dans son *Historia et Origo Calculi differentialis*[5].

Ces arithmétisations sont-elles différentes ? Avec bien d'autres historiens, je suis sensible à l'influence sur Cantor de la représentation — l'écriture d'un nombre ou d'une fonction numérique par les séries de Fourier — pour la construction des nombres réels. Et je vois que la nature de l'analogie n'est pas la même chez Newton et chez Cantor. Chez Newton en effet, le décimal, avec la somme d'une progression géométrique $\left(\frac{1}{1-x}=1+x+\ldots+x^n+\ldots\right)$ rapproche l'idée d'un calcul formel sur chaque « place » de l'écriture (on peut le voir en écrivant l'intégrale sous la forme $\log\frac{1}{1-x}=\int_0^x\frac{dt}{1-t}=x+\frac{x^2}{2}+\ldots+\frac{x^{n+1}}{n+1}+\ldots$, ou écrivant la dérivée sous forme

[3] A. Weil, *Œuvres Scientifiques/Collective Papers*, New York, …, Springer, 1979.
[4] Isaac Newton, *La Méthode des fluxions et des suites infinies*, trad. fr. M. de Buffon, Paris, Debure l'aîné, 1740, fac-sim., Paris, A. Blanchard, 1994.
[5] Le début de *Historia et Origo Calculi differentialis* est une déclaration historienne : Utilissimum est cognosci veras inventionum memorabilium origines, … Le manuscrit de Leibniz est donné dans C.I. Gerhardt, *Leibnizens mathematische Schriften,* Halle, H.W. Schmidt Verlag, 1858, n° XXXI, pp. 392-413.

$\frac{1}{(1-x)^2}=1+2x+\ldots+nx^{n-1}+\ldots$). Chez Cantor, il fallait au contraire un travail de distanciation pour « voir » que l'écriture décimale illimitée d'un nombre réel avait la simple signification d'un dénombrable, et que la redondance de l'écriture (2,000 … = 1,999 …) n'était pas un handicapà la preuve de cardinalité[6].

Mais déjà je m'engage dans une discussion que n'aiment guère les historiens traditionnels des mathématiques. Car elle est de nature psychologique, ou plutôt cognitiviste. Je cherche en effet à voir les différences, obstacles ou facilités, qui ont permis les inventions mathématiques de Newton et de Cantor. Il ne faut pas que cela m'empêche de toutes les deux les qualifier d'arithmétisation de la pensée ?

Je ne veux pas poursuivre sur ce terrain et ce comparatisme pour parler de l'ordre numérique de son histoire. Me paraît clair que, quelle que soit la définition que je donnerais de l'arithmétisation, et aussi loin que je chercherais dans les manuscrits cantoriens ou newtoniens, et d'autres encore, je ne parviendrais pas à une contradiction entre l'origine d'un nombre représenté (écriture décimale) et le résultat (calcul différentiel et intégral, théorie des ensembles et cardinaux). C'est seulement le rythme de l'histoire que je dirais autrement. Si je mets d'emblée en arithmétique (ou théorie des nombres) la représentation décimale infinie, ou la représentation par fractions continues, ou l'antiphérèse, je déduirais une longue continuité de pensée jusqu'à la topologie. Au contraire, si je range d'avance ces écritures et opérations conceptuelles numériques en un autre genre, celui de la géométrie et des quantités continues par exemple, et l'opposant au domaine du discret et des nombres entiers, je dirais une autre histoire, faite de ruptures. Newton et Cantor, cassent un type de raisonnement géométrique pour faire voir un formalisme algébrique et une performance de calcul. Il me semble qu'il ne faut pas négliger les objectifs fort différents de Newton et de Cantor. Newton poursuit une opération, un calcul, et se veut continuiste ; Cantor envisage une classification non encore pensée sur l'infini (le dénombrable comme distinct du continu), et se veut révolutionnaire.

Dans toute étude de la pensée numérique envisagée comme un domaine isolable en soi, et si l'on tient à conserver un regard d'historien, il est tentant, au lieu d'oppositions, de plutôt sonder les raisons données pour telle ou telle répartition dans les différentes disciplines mathématiques. Précisément au moment où apparaissent de nouvelles idées, la théorie des ensembles et la topologie, la théorie des séries entières, le Calcul, l'intégrale de Lebesgue, etc. qui toutes peuvent revendiquer une part de numérique. C'est une façon de justifier les présentes réflexions à la manière d'une question. Et jusqu'à une mise à question du numérique. Cette mise en question est une donnée de l'histoire des mathématiques.

Ce qui relève de la quantité rythmée par le nombre entier a souvent été distingué comme étant trop particulier par rapport à ce qui relève de la quantité mesurée. Un exemple tiré des notations est tout à fait symptomatique. Jusque tard dans le XIX[e] siècle, on a utilisé en géométrie l'écriture a : b : : c : d, la distinguant soigneusement de l'écriture algébrique $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$. Et ce malgré Leibniz qui, très formellement, expliquait que le calcul et l'écriture des proportions n'est qu'une partie de l'algèbre[7]. Par cette distinction de deux types de proportions, que l'on peut considérer comme issue d'Euclide, ne voulait-on pas signaler, contrairement à Euclide, que la généralité de la pensée, et sa poursuite, ne pouvait pas être effectuée à partir des seuls nombres ?

C'est donc la revendication d'un ordre propre du numérique que je préfère traquer dans l'histoire. Je ne cherche pas une éventuelle supériorité du statut, à la façon rhétorique dont Lagrange répétait devant un Laplace, médusé, à l'École normale de l'an III, que

[6] J. Dhombres, *Nombre, mesure et continu. Épistémologie et histoire*, Paris, Nathan, 1978.

[7] Je ne pense pas, à Peiresc, et devant le présent groupe d'intervenants, avoir besoin d'être plus précis sur le rôle de la théorie des proportions qui fut à l'origine du premier séminaire d'histoire des sciences à l'Université de Nantes, dans les années 1980, fondé par Jean-Louis Gardies et moi-même.

l'arithmétique était bien la « reine des sciences »[8]. Je cherche la revendication d'une simplification apportée par le numérique et cette considération me suffit ici pour parler d'un ordre propre.

La remarque de Lagrange dit tout le contraire de la constitution d'un ordre du numérique : si l'arithmétique est louable, c'est qu'elle est difficile a-t-il besoin d'insister. C'est peut-être que, pour parler juste un temps comme son contemporain Kant, on n'y dispose pas d'une intuition *a priori* et qu'on n'y voit pas naturellement des schémas géométriques. L'algèbre les a apportés et c'est bien ce que Lagrange espérait. Ma contribution historique concerne des cas où le caractère apparemment compliqué du nombre, dit inaccessible (sauf à la contemplation souveraine), revendique une simplicité d'approche (la simplicité étant entendue du point de vue mathématique).

Il me semble voir cette revendication fréquemment exposée au XVI[e] siècle dans les ouvrages d'enseignement de la géométrie, et jusque dans l'ouvrage fondamental de la didactique, les *Éléments* d'Euclide. Simon Stevin explicite cette revendication sur le mode de l'égalité, puisqu'il fait une démonstration par figure, et qu'il fait aussi une démonstration par nombres. Et il s'exprime plus fortement encore lorsqu'il dit reprendre une expression de son élève Maurice de Nassau, sur « ceux qui se battent contre leur reflet dans un miroir » sans jamais l'atteindre parce qu'ils étudient uniquement les principes euclidiens « sans passer à la pratique »[9]. Mais il n'y a pas de revendication pour les figures dans la *Disme* de 1585. Puisque le numérique est chez lui, si l'on peut dire[10], pas plus qu'il n'y a de revendication numérique chez tous ceux qui travaillent les logarithmes au début du XVII[e] siècle. Dans la mesure où les tables sont l'objectif, et la théorie des proportions le moyen, et le seul moyen algébrique. On n'est pas étonné de ne guère trouver de figures géométriques à ce propos chez Napier, chez Bürgi, chez Kepler, chez Briggs, et bien entendu chez Vlacq[11]. Et c'est bien le contraire qui s'opère : le numérique est interprété géométriquement. Par exemple, par Grégoire de Saint-Vincent, qui à partir de l'hyperbole et de l'aire de ses segments découpés par des parallèles aux asymptotes, fournit la fonction logarithme. Et aussi bien la fonction exponentielle, dont c'est la première définition à la manière euclidienne[12].

Il me faut donc poursuivre dans le temps pour trouver la revendication numérique de simplification, et je ne peux pas choisir la méthode de la descente infinie de Fermat, puisque celle-ci est tout le contraire. Une propriété géométrique des courbes — leur genre — permet une résolution d'équations numériques. Je ne peux pas non plus m'arrêter à l'acte analytique de Descartes, puisque ce n'est pas le numérique qui « démêle le compliqué » de la figure de Pappus, mais une écriture algébrique, celle des formes linéaires[13].

Je ne regarderai pas en numéricien la naissance du calcul différentiel et intégral, aussi bien chez Leibniz que chez Newton, mais j'arrive enfin au lieu historique que j'ai choisi pour ce colloque. Il s'agit, avec une approche toute numérique de l'intégrale, de l'explication de la stabilité des vaisseaux, et de l'invention du métacentre au milieu du XVIII[e] siècle.

---

[8] J. Dhombres (dir.), *L'École normale de l'an III,* Paris, Dunod, 1992.

[9] S. Stevin, *The principal Works of Simon Stevin,* Amsterdam, vol. IV.

[10] Le titre commentaire de la Disme indique suffisamment ce point de vue : « enseignant de manière extraordinairement claire tous les calculs indispensables parmi les hommes, effectués au moyen de nombres entiers et sans fractions ».

[11] J. Dhombres, Ce qu'il y a d'algèbre en analyse, avec le logarithme comme objet d'histoire, *Analyse et démarche analytique,* 9[e] colloque Inter-Irem, reims, 1998, pp. 149-204.

[12] J. Dhombres, « L'innovation comme produit captif de la tradition. Entre Apollonius et Descartes, une théorie des courbes chez Grégoire de Saint-Vincent », C.S. Roero, M. Panza (eds.), *Geometria, flussioni e differenziali,* La Citta del Sole, 1995 ; pp. 17-101."

[13] Je veux dire que l'exponentielle est définie par des rapports donnés sous l'hyperbole, et non par généralisation avec une propriété explicite de continuité de a^n pour n entier à a^x pour x réel, avec maintien de la propriété « numérique » $a^{n+m}=a^m.a^m$.

J. Dhombres, « La question du repère chez Descartes et dans la postérité cartésienne », *Réminisciences,* 4, 2000, pp. 27-77.

L'INTEGRALE COMME ORDONNANCEMENT NUMERIQUE

Pierre Bouguer est confronté, dans son *Traité du Navire, de sa construction et de ses mouvemens*, à la justification d'une formule expliquant universellement la stabilité d'un navire. Elle est doublement paradoxale. D'abord parce que destinée à des constructeurs, donc à des hommes de la pratique navale, elle se présente comme une intégrale, quelque chose que la plupart des académiciens des sciences de cette époque ne maîtrisent pas. D'autre part, parce que la formule ne fait intervenir que la forme de la carène, et même celle d'une seule coupe horizontale de cette carène au niveau de la ligne de flottaison. Il y a presque scandale, puisque ni la forme de l'étambot, ni la quille, ni la mâture et ses immenses manœuvres, où l'essentiel des œuvres vives, n'interviennent pour dire la façon dont un navire se comporte en mer, la façon dont il roule ou dont il tangue, son allure enfin comme disaient les marins.

L'intégrale en question sera jugée tellement surprenante, mais utile, qu'elle servira d'emblème pour les officiers de la marine suédoise à la fin du XVIII[e] siècle. Cette apparition sur des boutons d'uniforme est la première sortie publique de l'intégrale, sous sa notation inventée par Leibniz plus d'un siècle plus tôt.

(1) $$\frac{2}{3p}\int y^3 dx.$$

S'il manque aujourd'hui les bornes inférieure et supérieure de l'intégration pour comprendre qu'il s'agisse d'une valeur numérique, l'interprétation des lettres assure par l'analyse des dimensions qu'une longueur est en cause. En effet, p désigne un volume, le volume de la carène immergée, et y désigne une longueur, la largeur du vaisseau calculée sur le pont. L'intégrale (1) donne ce qu'on appelle la *hauteur métacentrique*, et il s'agit de la distance verticale entre le centre de gravité du navire et son métacentre.

Un dessin vectoriel, à partir de la notion de couple, et de celle d'oscillations, fait comprendre comment cette hauteur métacentrique peut intervenir pour expliquer la périodicité du roulis d'un bateau (figure 1). En termes modernes, le torseur des forces agissant sur le navire est réductible à un couple, et c'est celui de deux forces parallèles, mais opposées, portées respectivement en g et G. Ceci explique pourquoi le centre de gravité G doit être au-dessous du métacentre g si l'on veut qu'il y ait stabilité selon l'ordre du redressement du couple. « Méta » ici, comme l'a voulu Bouguer, signifie la plus haute hauteur possible du centre de gravité du navire.

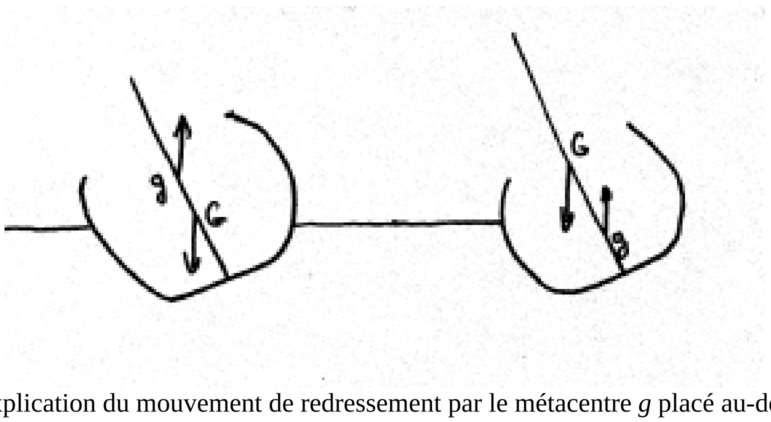

Figure 1 : L'explication du mouvement de redressement par le métacentre *g* placé au-dessus du centre de gravité du navire

Le dessin ci-dessus n'explique pas ce qu'est le métacentre, mais seulement qu'on peut y porter la force de poussée verticale d'Archimède, et qu'il est d'une nature analogue au centre de gravité du navire, où se porte la force verticale descendante de gravité. Je ne m'intéresse pas ici à la façon dont Bouguer procède, alors qu'il ne possède pas la symbolisation vectorielle et que le couple n'a pas encore de nom, faisant usage de la théorie du levier d'Archimède[14]. Je ne m'intéresse guère plus à la fixation du métacentre, dans la mesure où elle est facile à saisir, moyennant le langage de géométrie infinitésimale du XVIIIe siècle, langage qui est encore convaincant aujourd'hui, et j'utilise à peu près la figure originale de Bouguer (figure 2). Quand le navire bouge un peu, sous quelque effet que ce soit, sa propre verticale à partir du nouveau centre de carène γ change par rapport à la verticale locale passant par Γ, le centre originel de carène. Le métacentre est le point de rencontre de ces deux verticales, plus exactement la limite de ce point de rencontre lorsque l'angle α repérant le mouvement tend vers 0. On aura remarqué la convention de représentation adoptée par Bouguer, le navire reste fixe, et c'est la ligne horizontale de la mer qui bouge, de AB en ab.

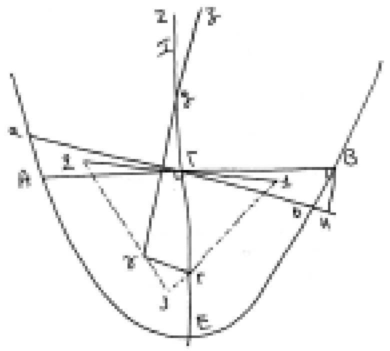

Figure 2 : Une coupe transversale du navire

Cette représentation géométrique de la figure 2 ne permet pas d'interpréter l'intégrale (1). Et c'est donc pour Bouguer un troisième paradoxe à lever. Pour expliquer l'intégrale (1), il doit faire comprendre pourquoi la coupe transversale du navire, celle qui sert à voir et poser le métacentre, doit si être remplacée par une coupe horizontale du même navire, coupe où ne figure plus le métacentre. C'est ce moment précis du raisonnement de Bouguer que je veux considérer. Car c'est un un ordonnancement de coupes transversales le long de l'axe de la coupe horizontale. Et je souhaite qualifier ce moment de numérique.

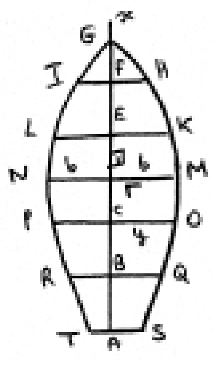

Figure 3 : Coupe horizontale du navire au niveau de la ligne de flottaison

Aussi bien, et alors que jusqu'à ce point de son texte Bouguer n'avait utilisé que l'écriture et le langage de la théorie des proportions, il use brusquement de l'écriture algébrique. En fait, c'est l'écriture de Descartes dans la *Géométrie,* parue un siècle plus tôt que *le Traité du navire*. Il ordonne la « verticale » AB de la coupe horizontale du navire en

[14] Voir P. Radelet-de-Grave, « Composition des moments ou la querelle des couples », Actes du Colloque *Les enfants du siècle*, à paraître dans *Sciences et Techniques en Perspective,* 2001.

repérant par *x* la « hauteur », et donc par *y* la « largeur de la carène »[15]. De sorte que *dx* va être utilisé pour dénoter l'écart entre deux coupes transversales placées le long de la droite AB de la coupe horizontale (qui ne doit pas être lue comme une verticale physique du navire). Il n'y a aucune signification autre que cet espacement dans l'ordre où se déploie la variable *x*.

Il paraît important à Bouguer, ici même, et comme scandant sa démonstration, de signaler la généralité de son calcul, remarque qui peut exaspérer le physicien, ou le marin. En ce que Bouguer indique que la droite AB pourrait ne pas être l'axe de symétrie du navire. Un navire aurait ainsi des flancs babord ou tribord différents. Il reste encore à voir de tels bateaux, en dehors des gondoles de Venise ! Mais la remarque de Bouguer a deux objets. L'un est de manifester qu'il travaille sur une représentation du navire, non sur le navire entier, donc qu'il travaille sur une géométrie. L'autre de préparer une compréhension plus générale du métacentre, un point qui est certes défini pour le navire tout entier, mais dépend de la découpe faite du navire. Une découpe par tranches transversales à l'axe du navire donne le métacentre transversal et ainsi le lieu du roulis ; une découpe par d'autres tranches transversales, mais parallèles à l'axe longitudinal du navire, donne le métacentre du tangage. Dans ce dernier cas, il n'y a plus la symétrie du premier cas transversal. L'acte de prévention de Bouguer n'est pas une coquetterie de mathématicien, mais un acte pédagogique en faveur de l'intégrale, et de l'intégrale d'une fonction. Euler n'hésite pas à donner figure à cette sollicitude mathématique, en proposant une forme invraisemblable pour la coupe de la carène.

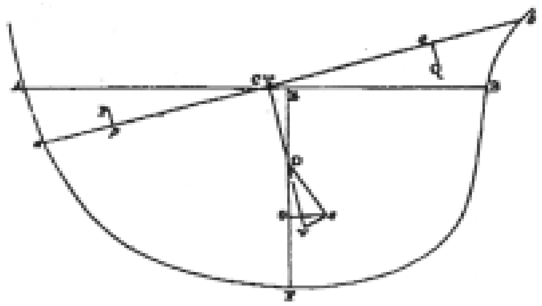

Figure 4 : Un dessin d'Euler sur la stabilité des bateaux dans *Scientia Navalis*

C'est *y*, fonction de la variable *x*, que Bouguer donne à voir. Et rien dans le calcul des proportions qu'il menait auparavant dans le *Traité* ne lui donnait cette connaissance. D'ailleurs, d'une courbe, la géométrie grecque et jusqu'à celle de la Renaissance, ne donnaient pas une écriture fonctionnelle. *L'habitus mentis* était de lier quatre points par des rapports, deux points où nous voyons deux positions de la variable, et deux points de la courbe, où nous voyons deux valeurs de la fonction. Le vocabulaire fonctionnel réduit à une correspondance entre *x* et *y* (*x*).

> Je nomme *x* les parties de l'axe de cette coupe, ou les parties de la longueur du navire, et y les demi-largeurs ou ordonnées… [16].

---

[15] Il n'était pas d'usage de préciser une origine et une orientation, car cela aurait contraint à utiliser des quantités négatives. Ce n'est pas là manque de rigueur, juste une habitude de calcul, mais en contradiction avec l'apparente généralité de la variable *x*. On sent qu'une origine est pensée à l'abscisse *x* pour laquelle la largeur du bateau est maximale (notée *b* dans la figure 3).

[16] Pierre Bouguer, *Traité du Navire, de sa construction, et de ses mouvemens*, Paris, Jombert, 1746, p. 260. Cette référence est désormais abrégée en T.N., p. 260

Cette ordonnance s’avère essentielle. Nous savons que la raison mathématique en est la possibilité même du calcul. Bouguer n’est pas seulement contraint par le profilement du calcul intégral à cette présentation fonctionnelle ; c’est l’objet même, le bateau, qui le contraint. La carène, même coupée horizontalement, n’est pas une courbe géométrique, cercle, ou même conique. Archimède, étudiant l’équilibre des bateaux, dix neuf siècles plus tôt, avait adopté une carène sphérique. Et sans doute ainsi raté le métacentre. Puisque, dans le cas d’une coupe circulaire, ce point se confond avec le centre du cercle. Il existait certes du temps de Bouguer des carènes elliptiques, jugées performantes pour de tout autres raisons que la stabilité. Mais la pratique imposait des courbes « mécaniques », que Descartes avait rejetées de sa *Géométrie*, faute de pouvoir en contrôler par l’algèbre la construction et les propriétés. Newton, aussi bien que Leibniz, avaient montré, par le double calcul des séries et des intégrales, que l’on pouvait travailler de façon semblable sur les courbes algébriques ou sur les courbes transcendantes, et même ne pas s’embarrasser des difficultés de calcul des courbes algébriques (expression de racines). Le dessin d’Euler de la figure 4 se veut rassurant.

Bouguer n’entre pas dans ces considérations ; la carène présente une forme réelle et elle s’impose comme un fait au mathématicien. La revanche de ce dernier, si je puis dire, est pour bientôt. C’est lui qui, au nom de la stabilité, réprouvera certaines formes. Et d’ailleurs, voici les formes de carène qui plaisaient aux constructeurs, formes pansues des galions ou efflanquées des flûtes : Bouguer impose et avec lui tous les architectes de la marine, le profil de la caisse, à tout le moins un profil à parois verticales ou évasées vers le haut au niveau de la ligne de flottaison.

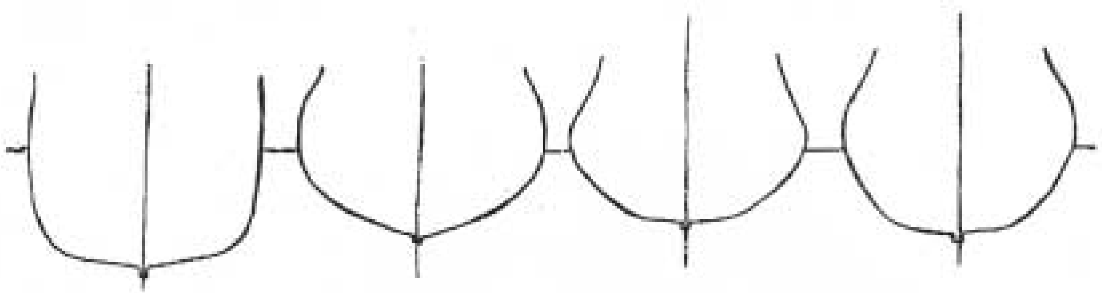

Figure 5 : Formes de carènes au XVIII^{e} siècle

La figure 2 ne donne qu’une coupe transversale du vaisseau : il y a médiation du réel par un schéma, et non prise en compte directe. Il y a donc analyse, mais on doit percevoir qu'il ne peut que s'agir d'une étape, et qu'il faut passer au bateau en entier : bref il faut intégrer. Le rappel à la réalité est signalé par le centre de gravité G, qui ne devrait pas être sur cette figure. En effet, la coupe transversale n’est pas nécessairement dans le plan vertical du centre de gravité du navire tout entier.

C’est cette réalité virtuelle qui permet au dessin de la coupe d’être comme animé. D’abord en ce sens que deux horizontales sont superposées, alors qu’il n’y a qu’un seul navire, ou plutôt une seule et même courbe. C’est ainsi qu’est représenté le bougé de la carène submergée, passant de AEB à aEb: de cette unicité de la carène doit se déduire une conservation, mais elle n'est pas explicite sur la figure, et nous la verrons apparaître au cours du calcul. Le dessin que j’ai dit animé est la trace rendue manifeste de la pensée infinitésimale en physique: c’était aussi la façon la plus normale pour un mathématicien de pratiquer le calcul infinitésimal dans les années 1740. Une autre animation de la figure va bientôt venir.

Puisque la détermination de g est l'objectif, la première chose à trouver est le point γ. Bouguer le détermine comme résultat d'une composition de centres de gravité. C'est cette composition qui organise le calcul, et on ne peut pas à ce propos le lire sur la figure, qui ne sert alors que comme un repérage des points. Il faut entrer dans le détail pour vérifier ce que je viens de dire. Cette fois, par souci d'authenticité, je donne la figure originale de Bouguer.

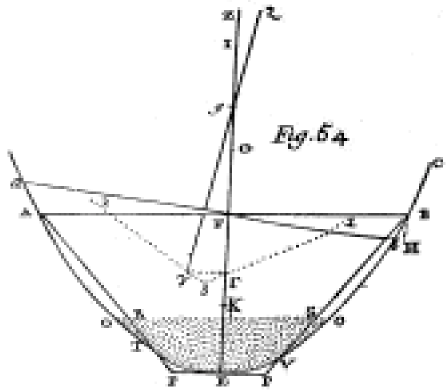

Figure 6 : Figure originale de P. Bouguer

La carène du navire est décomposée en trois parties, les deux parties quasi triangulaires aAF, BFb, l'une nouvellement submergée et l'autre sortie des eaux et la partie AFbEA. Ces parties ont respectivement comme centre de gravité les points notés *1*, *2* et *3*. Le jeu consiste à calculer γ comme barycentre de *1* et *2* , et Γ comme barycentre de *1* et *3*.

La démonstration est de géométrie élémentaire plane, et l'on reste au niveau de la coupe transversale. Il y a cependant un invariant, et il est issu de la physique. Les deux aires AFa et BFb sont égales « puisque le Navire occupe le même espace dans la Mer avant et après son inclinaison »[17] : il n'y a pas augmentation du volume de la carène immergée, car le bateau ne pèse pas plus à l'équilibre qu'en mouvement. Telle est l'hypothèse de conservation qui gère le calcul, et qui explique qu'un seul dessin de carène soit fourni. Si *1* Γ désigne la distance du point *1* à Γ, et AEbF l'aire de la surface ainsi délimitée, on dispose de $\frac{1\Gamma}{3\Gamma}=\frac{AEbF}{BFb}$ selon le calcul d'alors des centres de gravité. Aujourd'hui, pour le centre de gravité Γ de deux masses m_1 = (aire AEbF), m_2 = (aire BFb) en deux points , A_1 (= 1) et A_2 (= 2), on écrit $m_1\overrightarrow{\Gamma A_1}+m_2\overrightarrow{\Gamma A_2}=0$. Au XVIII^e^ siècle, on préférait écrire avec les proportions. Et de la même façon, on a $\frac{2\gamma}{3\gamma}=\frac{AEbF}{AFa}$. De l'égalité des aires AFa et BFb, il est déduit $\frac{1\Gamma}{3\Gamma}=\frac{2\gamma}{3\gamma}$. Cette proportion dit le parallélisme de la droite γΓ à la droite joignant *1* et *2*.

Il faut poursuivre le calcul pour en terminer avec la détermination du point γ. De $\frac{1\Gamma}{3\Gamma}=\frac{2\gamma}{3\gamma}=\frac{AEbF}{BFb}$, vient $\frac{1\Gamma+3\gamma}{3\Gamma}=\frac{AEbF+BFb}{BFb}$, soit $\frac{1\Gamma}{3\Gamma}=\frac{AEB}{BFb}$. Le parallélisme de *12* et de γ Γ fournit la proportion $\frac{13}{3\Gamma}=\frac{12}{\Gamma\gamma}$. D'où $\frac{12}{\Gamma\gamma}=\frac{AEB}{BFb}$. Est trouvée la proportion séparant les infiniment petits des quantités finies

[17] T.N., p. 259.

(2) $$\frac{\Gamma\gamma}{BFb} = \frac{12}{AEB}.$$

> Ainsi on pourra trouver la distance Γγ des centres de gravité Γ et γ, aussitôt qu'on connoîtra la solidité de la carène AEB, la solidité de la petite partie BFb, et la distance *12* des centres de gravité des petites parties BFb & Afa ; puisque ce sont là les trois premiers termes d'une proportion, dont la distance Γγ est la quatrième[18].

Il reste trois termes à calculer pour déterminer Γγ : BFb, 12 et AEB. Mais il faut sortir de la coupe transversale, utilisée à la figure 2 (ou la figure 6), pour faire intervenir la variable *x* et la fonction *y* indiquée par la figure 3.

La décomposition du bateau révélée par la coupe de la figure 6 a pour but de montrer ce que nous appelons l'intégrant, dans un plan orthogonal à celui de la coupe 3 ; elle ordonne. Il convient donc de voir la coupe 2 se déployer selon la coupe 1 et atteindre ainsi une valeur spatiale. La désignation BFb n'est donc pas changée ; c'est aussi bien une aire particulière selon une coupe particulière, une fonction de *x* comme aire générique (donc une intégrale possible) que le résultat même de cette intégration. Pour préciser, je distingue : BFb pour l'aire de la coupe particulière, BFb(x) pour l'aire de la coupe générale en *x* et (BFb) pour le volume constitué par l'empilement de ces coupes.

La coupe transversale est devenue une tranche ; la tranche est ordonnée par la variable *x*, et sa sommation se réduit à des grandeurs représentables sur une seule coupe où paraît alors le centre de gravité du navire tout entier, et le métacentre (figure 6).

Pour le calcul de (BFb), un solide donc mais qui n'en est pas moins un infiniment petit, le raisonnement se fait en termes de fonctions de la variable *x*, fonctions déterminées à partir de la coupe faite en AEb, où pour cet *x*, la longueur *y* vaut *b*. Les fonctions se déduisent par similitude. Ainsi, la hauteur du triangle général BFb(x) vaut $\frac{e}{b}y$, où *e* désigne la hauteur infiniment petite du triangle BFb, ayant par définition un angle droit en B (figure 3). Le volume élémentaire du prisme triangulaire est $\frac{e}{2b}y.ydx$. Soit

(3) $$(BFb) = \frac{e}{2b}\int y^2 dx.$$

Bouguer ne précise pas les bornes d'intégration, pas plus que ses contemporains. Le calcul de la distance (*12*) résulte d'une intégration de (*12*)(x), distance elle-même calculée à partir de *12*. Mais l'intégration ne peut pas automatiquement être celle de (*12*)(x) : la règle de sommation est obligatoirement celle des centres de gravité. Il y a donc intégration d'un moment, et c'est le point majeur du calcul de Bouguer.

Par division du bateau en deux, le calcul est d'abord celui de *1* F(x), qui donne $\frac{2}{3}y$ car on n'a compté que les infiniment petits d'ordre 1,*y* étant une fonction de *x*. L'intégrant devient $\frac{2}{3}y\frac{e}{2b}y^2$, un moment qui est le produit d'une distance par une aire (liée à un poids).

Et vient au total $\frac{2e}{6b}\int y^3 dx$. Mais on n'obtiendra (*12*) qu'en divisant encore (BFb) selon la règle des centres de gravité. Et il faut enfin multiplier par 2, car nous n'avons tenu compte que de la partie droite du bateau. On peut le supposer d'abord symétrique par rapport à l'axe transversal, « flancs toujours égaux » explique Bouguer. D'où :

[18] T.N., p. 260.

(4) $$(12)=\frac{4}{3}\frac{\int y^3dx}{\int y^2dx}.$$

Dans ce calcul, l'infiniment petit *e* a disparu. Bouguer ne calcule pas le dernier terme de la proportion qui justifie toute cette procédure, à savoir le volume de la carène (AEB). Il se contente de lui donner un nom, *p*, « solidité » de la carène. Le calcul intégral permet aussi bien de calculer cette solidité en fonction des données géométriques de la carène.

On aura noté que la sommation, qui nous paraît constituer vraiment l'intégrale, ne pose aucun problème particulier à Bouguer : il ajoute d'après le principe des tranches « numérotées » par x et « espacées » par dx. C'est l'intégrale définie qui est en jeu, et Bouguer ne fait aucune allusion à une interprétation par l'aire ; il ne fait aucune place à l'idée différentielle, et pour l'interprétation de l'intégrale comme l'opération inverse de la différentiation.

> Maintenant qu'on connaît la solidité $\frac{e}{2b}\int y^2dx$ de la petite partie BFb, et la distance $\frac{4}{3}\frac{\int y^3dx}{\int y^2dx}$ des centres de gravité *1* et *2*, il ne manque plus que de connoître la solidité de la carène pour pouvoir faire l'analogie indiquée.

Celle-ci devient en utilisant l'écriture conventionnelle avec des parenthèses

$$\frac{(\Gamma\gamma)}{(BFb)}=\frac{(12)}{(AEB)},$$

et elle fournit une relation notée (5) contenant à nouveau l'infiniment petit *e*, devant une intégrale :

(5) $$(\Gamma\gamma)=\frac{2e}{3bp}\int y^3dx.$$

Mais l'objectif est d'atteindre Γg. Et cette fois je n'ai plus à mettre de parenthèses. Car Γ est bien devenu le centre de gravité de la carène et g le métacentre. Il y a donc un dernier passage par une coupe.

L'objectif est aisément accessible, par une similitude lisible sur la figure 6 (ou 2), mais figure entendue comme une coupe prise dans le plan vertical passant pas le centre de gravité du navire I et celui de la carène Γ, et orthogonal à l'axe transversal du bateau[19]. Il y a en effet similitude des triangles rectangles Γgγ et BFH, puisque leurs côtés respectifs sont orthogonaux. Jouent donc le parallélisme de Γγ et de FB, la verticalité de γz par rapport à ab et celle de ΓZ par rapport à l'horizontale FB. Ainsi $\frac{(\Gamma\gamma)}{\Gamma g}=\frac{BH}{BF}=\frac{e}{b}$. Exploitant (5), la proportion obtenue fait disparaître l'infiniment petit *e*, et vient effectivement la relation (1), qui est ainsi démontrée :

(1) $$Gg=\frac{2}{3p}\int_{x_0}^{x_n}y^3dx.$$

[19]On peut penser que c'est cette nouvelle interprétation de la figure 3, comme coupe médiane, qui a conduit Bouguer à mettre l'explication différentielle si loin, après même le passage par le calcul intégral.

Et ce n'est pas Bouguer qui allait donner un nom, un nom de mécanique, à l'intégrale $\frac{2}{3}\int_{x_0}^{x_n} y^3 dx$ en la reliant à d'autres quantités variables : on conviendra plus tard de l'appeler *moment d'inertie* I par rapport au plan vertical passant par l'axe longitudinal du bateau. De sorte que la hauteur métacentrique Gg se présente sous une forme simple de fraction $Gg = \frac{I}{p}$, la valeur *p* étant aussi le résultat d'une intégrale, $\int_{x_0}^{x_n} zdx$, où z (x) = BFb(x) selon les notations utilisées. Cette aire *z(x)* ne dépend pas seulement de *y*.

Bouguer est bien plus occupé à indiquer comment calculer l'intégrale dans (1), ce qui est aussi bien en donner une définition.

> Si l'on suppose que la tranche horizontale du Navire faite à fleur d'eau, ait cent pieds de long et que les demi-largeurs mesurées à 12 $\frac{1}{2}$ pieds de distance les unes des autres, soient, en commençant par l'extrémité de la prouë, de 1 pied, de 9, de 12, de 13 $\frac{1}{2}$, de 13 $\frac{1}{2}$, de 12 $\frac{1}{2}$, de 11 $\frac{1}{2}$, de 9 $\frac{1}{2}$, et de 7 $\frac{1}{2}$, on trouvera aisément par la Méthode expliquée dans le second Chapitre de la Section précédente, l'intégrale Sy^3dx : car on aura 1,729, 1928, 2460 $\frac{3}{8}$, 2460 $\frac{3}{8}$, 1953 $\frac{1}{8}$, 1520 $\frac{7}{8}$, 857 $\frac{3}{8}$, et 421 $\frac{7}{8}$ pour les neuf cubes y^3 ; et si on ajoute ensemble tous ces nombres, mais ne faisant entrer dans l'addition que la seule moitié du premier et du dernier, et qu'on multiplie la somme par 12 $\frac{1}{2}$ qui est la distance d'une largeur à l'autre, il viendra 145 006. Après cela il ne restera plus qu'à diviser les $\frac{2}{3}$ de ce nombre par la solidité p de la carène, pour avoir la hauteur Γg.

On reconnaît la méthode dite des trapèzes[20] (présence de 1/2 aux deux extrémités) pour le calcul de l'intégrale, mais il n'y a aucune explication de type géométrique de l'approximation d'une aire. L'intégrale de Bouguer est un calcul numérique, qui correspond à l'ordonnancement qu'il a fait des coupes.

L'écriture même du calcul, sa disposition si l'on veut, peut être conduite à partir du schéma ordonné des coupes, posées convenablement sur la figure 3. La superposition ne requiert pas une figure dans l'espace (alors pourtant que deux plans verticaux sont en cause) : il suffit d'inscrire sur la même feuille un certain nombre de coupes analogues à la figure 6, précisément les coupes réalisées tous les 12,5 pieds mentionnés dans l'exemple précédent. En les numérotant convenablement. On obtient ce que l'on appelle un *plan de formes*, et Bouguer ne manque pas d'en donner un (figure 7). Le calcul intégral se fait ainsi directement sur cette figure composite, qui relève de la géométrie des abaques ou de la géométrie cotée, deux géométries qui n'avaient pas encore cours vers le milieu du 18e siècle. Et, par le plan de formes numérisé, le bateau est mis sous la coupe réglée de l'analyse. Le plan de formes permet de calculer la jauge du navire, et de même le centre de gravité, à condition bien sûr de donner d'autres renseignements sur la densité des matériaux utilisés et d'indiquer d'autres éléments, etc. Cette forme numérisée gouverne donc l'architecture navale[21].

---

[20] Le calcul de l'intégrale $\int_{x_0}^{x_n} y^3 dx$ pour la formule des trapèzes est la formule $\left[\frac{1}{2}y_0^3 + y_1^3 + \ldots + y_{n-1}^3 + \frac{1}{2}y_n^3\right]h_n$, avec $y_i = y(x_i)$ pour i= 0, 1, ..., n, et $h_n = (x_i - x_0) = (x_2 - x_1) = ... = (x_n - x_{n-1}) = \frac{1}{n}(x_n - x_0)$, et pour la valeur de n égale à 8.

[21] Un autre regard analytique devra certes être consacré à la mâture, etc.

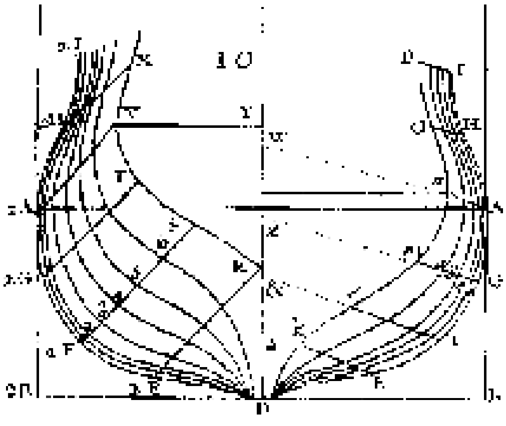

Figure 7 : Le plan de formes de Bouguer

Peut-être verra-t-on mieux ce que je veux indiquer de pensée numérique pour le plan de formes à partir d'un dessin dans l'espace qui figure souvent dans les manuels d'architecture navale du 18e siècle.

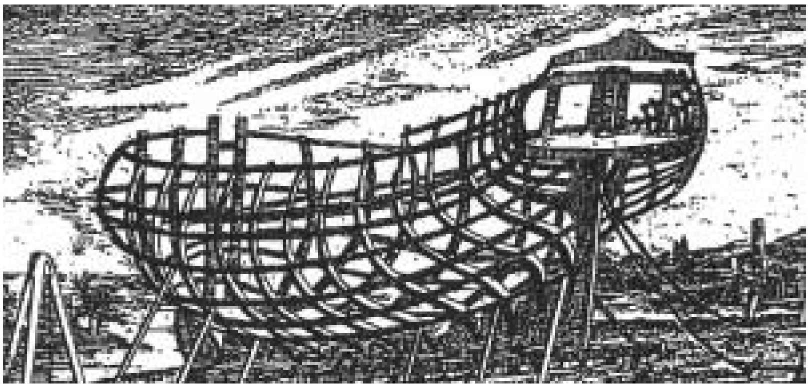

Figure 8 : La réalité du plan de formes

Le plan de formes n'a pas été inventé par Bouguer[22], mais il a su, par le calcul intégral, lui procurer une nouvelle fonction. C'est une fonction numérique.

Le plan de formes ne va plus quitter les ateliers de construction navale Le *Maritime Museum* de Greenwich conserve ainsi des centaines de plans de formes de navires, et en particulier des navires capturés. Le plan de forme étant alors refait, mémoire vivante de l'art des constructeurs, et fiche signalétique imparable[23]. Les plans de formes devinrent très soignés et se mirent en plus à servir pour établir les formes mêmes des coupes, auparavant travaillées au moyen d'instruments de charpentiers. L'on inventa des moyens graphiques pour représenter les formes des carènes, bien loin de la géométrie élémentaire[24]. Le plan de formes devenait un « patron ». Un détail d'une gravure du livre de Bouguer montre que le patronage se faisait sur le chantier même.

[22] Il n'existe pas, à ma connaissance, d'histoire de ces plans de formes. Dans *l'Hydrographie, contenant la théorie de la pratique de toutes les parties de la navigation*, Paris, I. Dupuis, 1667, 11 pl., 706, [6], 6 p. ill.., vaste compilation du jésuite Georges Fournier, on trouve une ébauche de plan de formes.
[23] On trouvera quelques uns de ces plans répertoriés dans un livre de G. Lion,
[24] Voir pour une histoire de la technique de dessin des plans de forme
Pour la construction navale et les techniques de charpenture, voir E. Rieth,

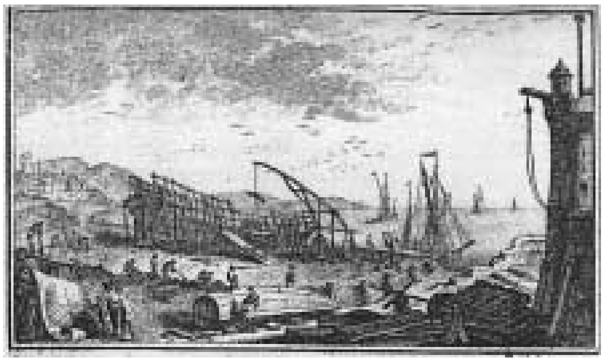

Figure 9

Bouguer explicite ce patronage.

> On saura désormais se déterminer sûrement entre les divers avis des constructeurs : et la multitude de leurs opinions bien loins d'être nuisibles, sera au contraire profitable, puisqu'elle donnera souvent lieu de faire un meilleur choix. J'ai pour ainsi dire, réduit le tout à la mesure ou à la balance, je l'ai rendu une affaire de calcul[25].

Ce calcul tuait un autre calcul, beaucoup plus ancien, le calcul des proportions. En effet, Bouguer montrait qu'on ne pouvait plus raisonner par similitude (par proportions) à partir de la coupe du bateau au niveau du maître-couple, et qu'il fallait correctement « additionner » les coupes[26].

Aussi bien, le calcul intégral montrait que les déformations occasionnelles de la forme de la carène ne venaient pas sensiblement modifier les résultats numériques : l'absence de poli de la carène n'était pas un handicap à la stabilité du navire. La « mise à crédit » des mathématiques pour le bateau rapportait des dividendes, et Bouguer les inventoriait avec soin.

On peut s'étonner que le calcul de Bouguer n'ait jamais trouvé sa place dans un cours de mathématique, et que sa technique numérique du calcul intégral n'ait pas été utilisée pour certaines formations professionnelles. Parmi toutes les raisons que l'on peut donner, et dont les plus importantes tiennent à la place attribuée aux mathématiques dans la formation d'un esprit, et en particulier d'un ingénieur, il faut garder sans doute le dédain pour le seul jeu numérique[27]. Aujourd'hui, Bouguer ferait un tabac[28] !

LES LIMITES DU NUMERIQUE ET LA REUSSITE DU THEOREME D'ARGAND

L'étude que je viens de mener est aussi une étude épistémologique : je suis parti d'un texte donnant des idées et des pratiques mathématiques qui firent postérité et que l'on utilise encore aujourd'hui. Mais je les ai analysées pour leur contenu propre, pour leur signification, en un mot pour leur « vérité ». Et pour leur histoire aussi, que Bouguer a

---

[25] TN, p. XXV.

[26] Il y a un goût très net de l'épistémologie chez Bouguer, et sa préface au *Traité du Navire* est en fait une « crititque » de l'utilisation des mathématiques en plysique. Voir Jean Dhombres, « Mettre la géométrie à crédit : Bouguer et le métacentre », *Sciences et Techniques en Perspective*, 2ème série., vol. 3, n° 2, 1999, pp. 305-363.

[27] J'ai essayé de théoriser ces diverses raisons dans *Histoire et Didactique*, (à partir de la *Scientia* Navalis et du calcul intégral, quelques réflexions sur la mise en perspective historique de l'apprentissage des mathématiques), Irem de Nantes, 2001, 67 pages.

[28] Je n'ai pas essayé de dire que le calcul de Bouguer n'était qu'une extension d'une pratique de la marine, par exemple celle du calcul de la jauge des navires. Mais dans l'article cité je tente de montrer la sollicitude pédagogique de Bouguer, qui lui fait faire découvrir aux marins le sens du métacentre à partir des méthodes de jauge. On aura noté en tout cas le rôle du calcul d'un centre de gravité dans l'exercice de Bouguer.

trouvée dans le calcul des centres de gravité. Mon commentaire fut localisé : je ne cherchais pas à dire tout ce que le texte de Bouguer peut inspirer. Je cherchais à dire une pensée numérique[29].

Puisque j'ai donné à voir que loin d'être une pratique quelconque, le numérique peut résoudre du difficile (stabilité), et porter avec lui de l'intuitif (plan de formes) une fois que la réussite antérieure (calcul du jaugeage d'un navire) a provoqué la théorisation, il me faut prendre l'autre biais. Et montrer comment sortir du numérique permet quelquefois de réussir[30]. L'arithmétique est la reine des mathématiques proclamait Lagrange : en homme des Lumières, il pensait surtout la reine au sens du monde des abeilles, celle qui justifie la ruche. J'aime le contredire, en prenant le cas d'un théorème qui devrait s'appeler théorème d'Argand. Car cet inconnu ou presque, un ouvrier tâcheron des mathématiques, a fait voir en 1806 ce que le grand spécialiste de théorie des nombres, Adrien-Marie Legendre, n'avait fait que calculer dix ans plus tôt.

Ici encore, j'élimine de mon récit une grande partie de choses qui intéressent à juste titre les historiens des mathématiques, la difficile lecture d'Argand par ses contemporains, la redécouverte (fortuite ?) de ses résultats de 1806, l'occultation par Cauchy de cette présentation d'Argand, etc. Je me concentre sur un seul « fait », une démonstration élémentaire du théorème de d'Alembert-Gauss : on le dit aussi *théorème fondamental de l'algèbre*.

Ce sont précisément les démonstrations qui en furent données autour de 1800 qui établirent que l'algèbre (l'algèbre polynomiale d'alors et qui se terminait, sans que l'algèbre elle-même ne disparaisse) ne pouvait par ses seuls moyens démontrer ce qui était pourtant déclaré le théorème la fondant et qui imposa le corps des nombres complexes. Cinquante ans plus tôt, Euler avait fait de ce corps le terrain même de l'analyse des fonctions, sans chercher une structure particulière. Sa démonstration algébrique du théorème « fondamental », essentiellement algébrique (à l'utilisation près du théorème des valeurs intermédiaires pour un polynôme), comportait des lacunes dans l'ordre algébrique même. Les démonstrations de Lagrange en comblèrent certaines, et de toute façon laissaient un théorème de démonstration longue. En 1795, Laplace réussissait une démonstration courte[31]. La critique vint quatre ans plus tard de Gauss : Laplace devait en effet supposer qu'un polynôme possède des racines (appartenant à un corps non autrement défini) et prouvait qu'alors ces racines étaient nécessairement complexes. Gauss exigeait une preuve de la première supposition : il procurait lui-même une autre preuve du théorème, difficile. Et il en fournira trois autres au cours de sa vie.

Restait donc en 1800 à retrouver une preuve élémentaire pour ce fameux « théorème fondamental ». C'est ce que fit Argand dans son livre de 1806, et dans des articles de 1813 à1815 qui corrigeaient ou précisaient son livre. Ce sont ces textes que je veux étudier d'un peu près. Il me faudra après comparer avec le texte de Legendre de 1796, afin de voir la filiation de l'innovation. Elle n'est pas dite par Argand, et Cauchy évite Argand et ne réfère qu'à Legendre.

Le titre du livre d'Argand en 1806 arbore l'innovation : *Essai sur une manière de représenter les quantités imaginaires dans les constructions géométriques*[32] et le dernier article du livre de Argand débute par l'énoncé général du théorème fondamental de

---

[29] En me limitant, j'évite autant que possible le piège majeur de l'érudition en histoire des mathématiques, qui fait accumuler tellement de choses qu'il n'existe plus de distance avec l'ensemble des textes originaux. À quoi bon alors une histoire des mathématiques ?

[30] Je sais que des historiens des mathématiques aujourd'hui, au nom d'une fatigante neutralité, sont rebelles à de tels jugements. Mais en quoi, en mathématiques, serait-il utile de regarder en arrière, de faire de l'histoire, si ce n'est pour juger la valeur d'une démarche ?

[31] *Séance des Écoles normales*

[32] La seule édition disponible du livre d'Argand est celle due à Hoüel en 1874, à partir d'un exemplaire que possédait Chasles. Le libraire Blanchard, en 1971, a fidèlement recopié Hoüel. Il est vraisemblable que l'édition de 1806 ait été à compte d'auteur et en un assez petit nombre d'exemplaires. La référence sera désormais à l'édition de Blanchard, sous la forme ARG. D'autres textes ont été ajoutés à cette édition, dont les textes d'Argand parus dans les *Annales de mathématiques pures et appliquées.*

l'algèbre. Alors que dans toutes les preuves précédentes les coefficients sont des nombres réels, les coefficients du polynôme d'Argand sont des nombres complexes. La preuve de la nature des racines est conduite de telle sorte que ces nombres ne soient pas isolés dans le raisonnement : ils l'organisent.

> On se propose, dans ce dernier article, de démontrer que tout polynôme de la forme
>
> $X^n + aX^{n-1} + bX^{n-2} + ...+ fX + g$ est décomposable en facteurs du premier degré $X + \alpha$.

S'il suffit de trouver un "nombre qui, pris pour X, rende égal à zéro le polynôme proposé"[33], encore faut-il que le nombre en question soit vérifié comme étant complexe. La démonstration d'Argand est conduite de telle façon que la réponse soit évidente : l'auteur ne sort jamais du corps des nombres complexes. Aussi, Argand fixe-t-il la notation fonctionnelle, le polynôme est noté Y, et sa valeur en $X = p + qi$ notée $Y_{(p + qi)}$, un nombre complexe bien sûr. Le jeu va consister à raisonner à la fois sur le plan où se déploient les $p + qi$ et celui où se déploient les $Y_{(p + qi)}$.

Les coefficients complexes, a, b, ..., g, peuvent en tout cas disparaître dans l'écriture de $Y_{(p+qi)}$, aussitôt développée selon les puissances de qi, et ce développement nécessairement fini (Y est un polynôme), fait intervenir des coefficients Q, R, S, évidemment complexes puisque l'on ne sort pas des opérations permises sur le corps des nombres complexes :

$$Y(p + qi) = Y(p) + qi\,Q + q^2i^2\,R + q^3i^3\,S + ...$$

Argand compare alors les grandeurs, et indique ce que l'on peut négliger :

> Si l'on suppose q infiniment petit, les termes affectés de q^2, q^3, ... disparaissent, et l'on a simplement

(1) $$Y_{(p + qi)} = Y_{(p)} + qi\,Q.$$

Ce raisonnement par simplification n'est plus accepté aujourd'hui : car il est qualitatif et ne donne pas la mesure de ce qui est négligé. Argand corrige. Il a reçu des critiques ; pourtant ces critiques ne portèrent pas sur la réduction opérée. C'est de lui-même que Argand a corrigé après une meilleure appréciation d'un de ses apports, la représentation des nombres complexes qui utilise l'argument et le module.

En 1815, Argand indique que la présence de trois termes au moins fait le succès du raisonnement de simplification. Il écrit seulement le développement de $Y_{(p + q)}$ où *p* et *q* sont deux complexes :

(2) $$Y_{(p + q)} = Y_{(p)} + Rq^r + Sq^s + ...+ Vq^v + q^n ,$$

« de manière qu'aucun des coefficients R, S, ..., V ne soit nul, et que les exposants r, s, ..., v, n'aillent en augmentant »[34]. Il y a trois termes au moins car si les coefficients complexes R, S, etc., étaient tous nuls, le théorème serait démontré, le caractère unitaire du polynôme faisant qu'une racine complexe évidente serait $p + \sqrt[n]{-Y_p}$.

Une écriture algébrique propre ayant été trouvée, il s'agit de démontrer que, par un choix convenable de q, le module de $Y_{(p+q)}$ peut être rendu moindre que celui de $Y_{(p)}$. C'est cette comparaison de grandeur numérique qui est essentielle, et c'est cela le résultat mathématique d'Argand. Si $Y_{(p)} \neq 0$, il existe *p'* voisin de *p* et $|Y_{(p')}| < |Y_{(p)}|$. Tenant compte des deux paramètres réels grâce auxquels est écrit un nombre complexe, Argand organise deux étapes séparées, mais enchaînées. Argand distingue la première étape qui détermine la

---

[33] R. Argand, 1806], ARG, p. 58. Le théorème occupe les pages 58 et 59 de la reproduction citée.
[34] ARG, p. 119.

« direction » du nombre complexe q, et la seconde étape qui en détermine la « grandeur ». Avec l'objectif de diminuer le module de $Y_{(p+q)}$.

Pour la direction, il convient de faire que l'argument de Rq^r dans (2) soit exactement opposé à celui de $Y_{(p)}$. Argand représente par KP le nombre complexe $Y_{(p)}$, par PA le nombre Rq^r, et enfin AH est toute la somme restante, $Sq^s + ...+ Vq^v + q^n$. « Le point A se trouvera sur la ligne PK, prolongée s'il le faut, par son extrémité K » dit Argand. A joué l'argument seul, car la multiplication par un nombre imaginaire permet de « tourner », en l'occurrence de faire que le terme Rq^r soit d'argument exactement opposé à celui de Y(p). Le lecteur ne peut que « voir » que la même démonstration ne prouverait pas que tout polynôme à coefficients réels possède au moins une racine réelle. Un des défauts de bien des démonstrations antérieures était de ne pas montrer ce qui manque au corps des réels. Il me semble que là réside l'avantage de la représentation géométrique des nombres complexes en vue de cette démonstration du théorème fondamental de l'algèbre : on « voit » que les manipulations réalisées ne sortent pas du corps des complexes. Je n'attribue pas cela à un ordre numérique, mais à l'algèbre des nombres complexes.

La direction du nombre complexe q étant ainsi fixée, « on peut en second lieu, la faire varier de grandeur » ; c'est-à-dire d'abord poser le point A entre P et K. Ce qui requiert un module assez petit pour q, qu'il faudrait noter d'une façon spéciale, par exemple $|q_1|$. Mais Argand n'a pas cette notation, ni l'indexation, et généralement il prononce le module, et se contente d'écrire q_1. Ce qui donne l'impression qu'il manipule des inégalités sur les nombres complexes ; mais la représentation géométrique corrige, et il suffit de penser distance. C'est la deuxième intervention des nombres complexes, qualifiable de vectorielle cette fois, et qui calcule sur une direction comme s'il s'agissait de nombres réels. Parce que « les exposants s, ..., v, n sont tous plus grands que r » dans (2), il reste à faire que le module de $Rq^r{}_1$, ou comme dit Argand que la distance de P à A, soit supérieur au module de $Sq_1{}^s + ...+ Vq_1{}^v + q_1{}^n$, qui est la distance de A à H. Cette imposition PA>AH fixe une certaine petitesse du module de q.

> Et par conséquent, si l'on trace un cercle de centre A et du rayon AP, le point H sera au-dedans de ce cercle, et il suit des premiers éléments de Géométrie que, K étant sur le prolongement du rayon PA, du côté du centre A, on a KH < KP[35].

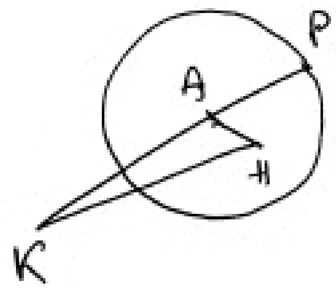

Figure 10

Que font ressortir les « bases » de la géométrie dont parle Argand, sinon la propriété du module qu'il explicite : « le module de la somme de plusieurs quantités n'est pas plus grand que la somme des modules de ces quantités »[36]. En l'occurrence, KH<KA + AH<KA + AP = KP. Nous pensons topologie métrique avec le module. De ce dernier, Argand fait un

[35] ARG, p.
[36] ARG, p.

instrument pour le maniement des inégalités. Car il n'y a pas d'ordre naturel sur les nombres complexes et c'est le module, une distance géométrique, qui lui permet d'ordonner. Il a fallu l'intervention des nombres complexes, où les inégalités perdent leur sens, pour que les mathématiciens fassent attention à la façon dont les inégalités se manipulent. Argand sait bien ce qu'implique son calcul, au point qu'il pourrait donner lieu à un automatisme, et à un calcul qui serait à proprement parler l'analyse.

> Revenons au sujet qui a donné lieu aux développements ci-dessus. On pourra demander s'il serait possible de les traduire dans le langage ordinaire de l'Analyse. Cela me paraît très probable ; mais peut-être serait-il difficile d'obtenir, par cette voie, un résultat aussi simple.

Argand dit laisser à des calculateurs plus habiles le soin de suivre cette mise en forme, qui est à nos yeux le b-a-ba de l'analyse. Il sait surtout que l'étude ainsi conduite, « une démonstration purement analytique », rendrait vaine sa tentative d'une géométrie dirigée, et devine que la représentation géométrique des nombres complexes ne serait plus illustrée par la preuve du théorème fondamental de l'algèbre. Il ne faut pas oublier l'objectif indiqué par le titre du livre de 1806. On conçoit le dilemme de l'inventeur qui en a trop fait : il a lui-même détruit en partie l'intérêt de sa construction

Si Argand a montré comment choisir *q* pour que le module de $Y_{(p+q)}$ soit directement inférieur au module de Y(p), il croit pouvoir poursuivre d'une façon algorithmique.

> Il s'ensuivra que la grandeur de $Y_{(p+q)}$ sera plus petite que celle de $Y_{(p)}$; par la même marche, on obtiendra une nouvelle valeur de Y, qui sera plus petite que celle de $Y_{(p+q)}$, et ainsi de suite. Donc on parviendra à une valeur de X, qui donnera Y = 0[37].

La dernière implication est insuffisamment prouvée : une suite décroissante en module de nombres complexes n'est pas nécessairement convergente, et encore moins convergente vers 0. En 1813, Argand signale qu'une explication avait dû être ajoutée à la première preuve, car elle ne convainquait pas Legendre. Auteur célèbre des *Eléments de géométrie* de l'an II et rénovateur de la pensée euclidienne, Legendre était le tenant d'un type de rigueur en mathématique. Mais il n'avait pas vu la faute de démonstration sur la convergence de la suite de nombres complexes. En 1814, Argand répondait à un autre, à Servois professeur de mathématiques qui avait enfin soulevé l'objection sur la convergence vers 0 de la suite des nombres complexes indiquée. Servois signalait :

> Ce n'est point assez, ce me semble, de trouver des valeurs de *x* qui donnent au polynôme des valeurs sans cesse décroissantes ; il faut de plus, que la loi des décroissements amène nécessairement le polynôme à *zéro*, ou qu'elle soit telle que *zéro* ne soit pas, si l'on peut s'exprimer ainsi, l'*asymptote* du polynôme[38].

Argand, en réponse, prétendit que sa rigueur consistait à s'affranchir « de la considération des quantités évanouissantes »[39], qui, selon lui, justifie la réduction à la formule (1) ; il suggérait malencontreusement que l'algèbre pure l'exonérait de tout défaut. Cauchy, pour cette seule raison, ne pouvait référer à Argand.

Or, l'objection posée, ou plutôt les objections que Argand retient et fait siennes, permettent l'analyse. Nous venons de voir Argand cerner de façon quantitative, avec les modules, la réduction de l'expression $Y_{(p+\rho i)}$ à $Y_{(p)} + Ri^r$ en négligeant $Si^s + ... + Vi^v + i^n$. Dans cette même veine, il lui faudrait assurer la convergence effective vers 0 de la suite de

[37] Dans cet extait, on a modifié la notation de Argand. Il écrit $Y_{(p+qi)}$.
[38] Lettre de M. Servois datée de l'Ecole d'Artillerie et du Génie de La Fère du 23 novembre 1813, ARG, p. 104.
[39] [R. Argand, 1814], ARG, p. 117.

nombres complexes construite par le raisonnement de 1806, et sur laquelle porte l'objection de Servois. Argand voit qu'un autre raisonnement évitera la preuve d'une convergence. Ainsi intervient le raisonnement par l'absurde : la valeur de $Y_{(p+q)}$ étant représentée par KP, où K est l'origine sil'on suppose que le polynôme ne s'annule jamais sur le plan complexe, c'est que P ne coïncide jamais avec K. C'est ce qui permet la localisation du raisonnement en un minimum.

> Or si, dans l'infinité de valeurs dont x est susceptible, il n'y en avait aucune qui donnât lieu à cette coïncidence, la ligne KP ne pourrait jamais devenir nulle ; et de toutes les valeurs de KP, il y en aurait nécessairement une qui serait plus petite que toutes les autres[40].

Si le minimum est admis, le raisonnement de 1806 de diminution du module en tournant convenablement autour du minimum, nettement amélioré en 1814 par la manipulation analytique des inégalités, termine la preuve par l'absurde.

Mais l'existence d'un minimum n'est pas démontrée par Argand : il y a encore faute, et cette fois par insuffisance. Il faudra encore un peu de temps pour que les problèmes d'extremum soient réglés.

Avec cet *Essai* et en particulier ses corrections successives, nous assistons en direct à la mise en œuvre d'une pratique de l'analyse. Elle n'est pas uniquement faite par essais et erreurs ; elle provient à la fois d'une décomposition en difficultés successives qui peuvent être démontées séparément et d'une manipulation ordonnée des inégalités. D'autres démontreront l'existence de ce minimum, d'autres encore régleront mieux le jeu des inégalités.

Après celle sur la représentation en 1806, et celle de 1813 sur l'estimation des grandeurs respectives, la nouvelle innovation est le passage au raisonnement par l'absurde. Il signe la reconnaissance qu'un calcul direct n'est pas disponible : il témoigne d'une compréhension d'une difficulté du problème posé. A la façon d'un souvenir, ou d'un repérage, le raisonnement par l'absurde sera maintenu dans toutes les démonstrations ultérieures du théorème fondamental de l'algèbre qui se réclament de l'analyse. Alors même qu'il n'est plus logiquement indispensable, l'analyse ayant intégré le raisonnement par l'absurde dans ses constructions fondamentales, comme l'existence d'un minimum pour une fonction continue sur un compact, voire ultérieurement dans l'établissement des propriétés des compacts.

Argand sait qu'en raisonnant ainsi il perd une détermination constructive de la racine : « Les raisonnements qui précèdent ne sauraient fournir, du moins sans de nouveaux développements, une méthode d'approximation »[41]. On ne peut donc pas du tout dire qu'il détermine l'analyse en théorisant des pratiques numériques. Il doit au contraire s'en éloigner.

En effet, que pourrait valoir une tentative « numérique » de poursuivre quantitativement le calcul qui permet de négliger les termes $Si^s + ... + Vi^v + i^n$ afin d'assurer la convergence dont le texte de 1806 assurait la réalité ? Elle signifierait la possibilité, partant d'un point p_1 du plan complexe et de $Y(p_1)$ dont la valeur n'est pas nulle, de trouver par le jeu sur l'argument et le module, un point p_2 du plan complexe tel que non seulement le module de $Y(p_2)$ soit strictement inférieur à celui de $Y(p_1)$, mais encore que l'on ait une mesure de cette diminution. Par exemple, sous la forme d'une inégalité :

$$|Y(p_2)|\leq\alpha|Y(p_1)|, \tag{3}$$

où α est un nombre positif, strictement inférieur à l'unité et indépendant de p_1.

Si une telle inégalité était démontrée, on aurait fortement avancé sur la voie d'un algorithme général de calcul des racines des polynômes. Il ne resterait qu'à assurer un

---

40 [R. Argand, 1814], ARG, p. 119.
41 [R. Argand,1814], ARG, p. 121.

moyen de sélectionner les sous-suites convergentes de points ainsi construites[42]. Pour d'autres problèmes, ce type d'inégalités existait effectivement dans la méthode grecque d'exhaustion en géométrie, avec en général $\alpha = 1/2$. Il est vraisemblable que Argand en ait cherché la possibilité, et on peut interpréter comme une réflexion sur l'échec de cette tentative un commentaire qu'il donne pour expliquer la contrainte du passage par un raisonnement par l'absurde :

> Il est presque superflu de s'arrêter à une objection qu'on pourrait faire à ce qui précède, en disant que, si l'on entreprenait de déterminer la valeur de *x* en suivant la marche qui est prescrite pour diminuer progressivement $Y_{(x)}$, il serait possible qu'on n'y parvînt jamais, parce que la valeur de *q*, pourrait, dans les substitutions successives, ne diminuer que par des degrés de plus en plus petits. Le contraire ne se trouve point prouvé, en effet ; mais il n'en résulte autre chose, sinon que les considérations qui précèdent ne sauraient fournir, du moins sans de nouveaux développements, une méthode d'approximation ; et cela n'infirme aucunement la démonstration du théorème[43].

L'analyse n'est pas seulement une méthode ; elle est adaptation à une réalité mathématique rebelle à la contemplation directe. Le plus étonnant est alors qu'une inégalité de type (3) soit exacte, avec un coefficient α strictement inférieur à 1 et ne dépendant que du degré du polynôme Y. Et que la démonstration, remarquablement élégante, ne requiert pas de méthodes de calcul qu'un mathématicien des années 1800 n'eut pu, sinon connaître, du moins comprendre. Le calcul utilise fondamentalement les inégalités et le module, et travaille sur chaque monôme du polynôme, alors que Argand comparait trois blocs seulement.

L'ouvrage de Cauchy où nous trouvons en 1821 une nouvelle démonstration du théorème fondamental de l'algèbre est un texte destiné aux élèves de l'Ecole polytechnique. Mais Cauchy se réfère avant tout à sa perception des choses mathématiques. Quoique solitaire, il sait qu'il occupe une position stratégique, lui permettant de parler avec autorité. Il la manifeste dans son introduction, et ne cache pas son souci épistémologique, qui n'est pas nécessairement un point de vue pédagogique[44] :

> Quant aux méthodes, j'ai cherché à leur donner toute la rigueur qu'on exige en géométrie, de manière à ne jamais recourir aux raisons tirées de la généralité de l'algèbre[45].

Puisque, pas plus qu'Argand, Cauchy n'utilise de figures, nous devons interpréter cette déclaration comme rapportant la rigueur à celle de la mathématique grecque, aux *Eléments* d'Euclide en particulier, le géomètre par excellence. Parce qu'elle correspond remarquablement aux exigences de Newton un siècle plus tôt quant à la présentation du Calcul différentiel et intégral, cette renaissance d'une pensée antique prend un sens tout particulier dans l'instance du théorème fondamental de l'algèbre. Car, à la rigueur d'un retour, se superpose un choix de Cauchy. Celui de considérer les nombres complexes comme une géométrie où ne règne qu'un seul principe d'identité, l'égalité des parties réelle et imaginaire. Sans que ne joue aucune autre interprétation géométrique, qu'elle soit vectorielle ou autre :

> Les différentes formules ne présentent plus que des relations entre les quantités réelles, relations qu'il est toujours facile de vérifier par la substitution des nombres aux quantités elles-mêmes[46].

---

[42]Le calcul d'Argand montre en effet que l'on dispose d'une estimation de la norme de p_2 à partir de celle de p_1. Ainsi, la suite de points p_1 resterait dans un disque convenable du plan complexe, et aurait donc des sous-suites convergentes.

[43] ARG, p. 121.

[44] On trouvera dans Bruno Belhoste, *Cauchy (1789-1857), un mathématicien légitimiste au XIX[e] siècle*, Paris, Belin, 1985, des indications sur Cauchy en tant que professeur à l'Ecole polytechnique.

[44] J'ai tenté de montrer ailleurs que c'est la formule du développement du binôme de Newton, pour un exposant réel quelconque, qui constitue le couronnement de l'Analyse algébrique [J. Dhombres, …]

[45] A.L. Cauchy, 1821, *Cours d'Analyse de l'École royale polytechnique*, Paris, Debure, p. ij. Cet ouvrage, qui a été reproduit dans *les Œuvres complètes*, sera ici référencé par [A.L. Cauchy, 1821].

Ce choix provient d'une réussite. Cauchy a pu établir une théorie des séries entières convergentes, à variables aussi bien réelles que complexes.

> Avant d'effectuer la sommation d'aucune série, j'ai dû examiner dans quels cas les séries peuvent être sommées, ou, en d'autres termes, quelles sont les conditions de leur convergence ; et j'ai, à ce sujet, établi des règles générales qui me paraissent mériter quelque attention[47].

Il est surprenant que le théorème fondamental de l'algèbre doive venir à l'issue d'une telle théorie, alors qu'il ne porte que sur un polynôme, qui est une série entière bien particulière, puisque finie. A la façon d'Euclide, Cauchy montre par le seul ordre adopté pour sa présentation, que l'on ne peut pas éviter le passage par une plus grande généralité, que l'algèbre ne se ferme pas sur elle-même, qu'il y a besoin d'autre chose.

Important, le théorème n'est pas le clou de la théorie, mais une application particulière. C'est par des gestes de ce genre qu'un mathématicien modifie l'architecture générale des mathématiques.

Je ne prends qu'un aspect particulier de cette démonstration, le raisonnement par l'absurde qui la termine et qui tient à la raison de fond déjà évoquée, la non constructivité du théorème. Bien sûr, pas plus qu'Argand, Cauchy n'a une preuve de cette impossibilité. Il présente son raisonnement sous la forme typique de la méthode d'exhaustion des Grecs : une égalité est obtenue car l'inégalité est démontrée être impossible. Argand était plus engagé : c'était une infinité d'inégalités qu'il supposait (à savoir f(z) différent de zéro pour tout z complexe). La preuve de Cauchy n'est pas courte ; elle est systématique. Elle est donc typique. Elle n'est pas le couronnement de l'Analyse algébrique ; elle en est l'usage normal[48].

Cauchy a développé la somme F(u,v) du carré des parties réelle et imaginaire d'un polynôme f(u+iv) autour d'un point (u_0, v_0) supposé réaliser le minimum de ce carré. Il obtient : $\alpha^k\rho^k R_k(\cos(T_k+\theta) + i\sin(T_k+\theta))$ pour terme général du développement de $f(u_0 + iv_0 + \alpha(h+ik))$, et donc $\alpha^k\rho^k R_k\cos(T_k+\theta)$ et $\alpha^k\rho^k R_k\sin(T_k+\theta)$ pour terme général de la partie réelle et respectivement de la partie imaginaire. (Ici α est un infiniment petit au sens de Cauchy, c'est-à-dire une suite de nombres qui tend vers 0). Ce qui ne donne pas aussitôt la forme du terme général du module au carré. Car il faut encore additionner deux développements, chacun étant pris au carré. On voit aussitôt en faisant $\alpha = 0$ que le terme constant de tout ce développement est le carré du module de f en son minimum, ce que Cauchy a déjà noté A et qu'il exprime encore par $A = R^2$. Mais le second terme est déjà une somme. L'habitude algébrique des séries consiste à reconnaître dans le second terme non seulement ceux où R est en facteur, mais ceux où les R_k sont au premier degré[49]. Si l'on met $\alpha\rho R\cos T$ en facteur, le second terme prend alors la forme :

$$2[R_1\cos(T_1-T+\theta)+ \ldots + \alpha^{k-1}\rho^{k-1}R_k\cos(T_k-T+k\theta)+ \ldots + \alpha^{n-1}\rho^{n-1}R_n\cos(T_n-T+n\theta)].$$

Il y a alors un troisième et dernier terme, celui où n'intervient plus R, et qui est exprimé comme le produit de $\alpha^2\rho^2$ par

$$[R_1\cos(T_1+\theta)+\ldots + \alpha^{n-1}\rho^{n-1}R_n\cos(T_n+n\theta)]^2 + [R_1\sin(T_1+\theta)+ \ldots + \alpha^{n-1}\rho^{n-1}R_n\sin(T_n+n\theta)]^2 .$$

Supposons que R ne soit pas nul, c'est-à-dire que la valeur du polynôme f au minimum de son module ne soit pas nulle. Après le terme constant, le premier terme non nul en R dans l'ordre établi selon les puissances de α est

$$2\alpha^m\rho^m RR_m\cos(T_m - T+\theta).$$

---

[46] [A.L. Cauchy, 1821, p. iv].

[47] [A.L. Cauchy,1821, p. v].

[48] J'ai tenté de montrer ailleurs que c'est la formule du développement du binôme de Newton, pour un exposant réel quelconque, qui constitue le couronnement de l'Analyse algébrique, J. Dhombres

[49] Cauchy pense en tant que forme générique lorsqu'il parle d'un « développement suivant les puissances descendantes de R ».

Alors qu'il pourrait s'en passer, Cauchy calcule cependant le cas où la valeur A est nulle, et apparaît alors comme premier terme en puissances de α : $\alpha^{2m}\rho^{2m}R^2{}_m$. La signification du mot « premier » ne se réfère pas aux puissances décroissantes de R, mais à la première puissance de α vers laquelle le raisonnement se tourne (« le terme qui renferme la plus petite puissance de α »). Car la première puissance de α est la seule à considérer : il n'est plus besoin du raisonnement supplémentaire de Argand, car ainsi fonctionne le calcul infinitésimal mis au service d'une théorie des séries convergentes.

Ce premier terme doit manifester un minimum, celui-ci ne pouvant être compris que par rapport à l'unique variable qui reste totalement à notre disposition, à savoir l'angle θ, toutes les autres ayant déjà été fixées d'une façon ou d'une autre, y compris l'infinitésimal α. Or la variation quelconque de θ donne un signe variable au premier terme calculé dans le cas où la constante A (le carré de R) n'est pas nulle. Ce ne peut exprimer un extremum. Donc, conclusion du raisonnement par l'absurde, la constante A est nulle, et le polynôme f a comme racine $x = u_0 + iv_0$, ce point qui n'a pas été construit, mais dont l'existence a été établie comme un minimum[50].

Cauchy a adopté la forme rhétoriquement la plus faible d'un raisonnement par l'absurde, celle qui consiste à dire que si l'on a prouvé qu'un problème supposé réalisé – l'existence d'un minimum– se réduit à la possibilité « P » ou « non P » (A= 0 ou A≠0), et si l'on a prouvé par ailleurs que " non P" (A≠0) empêche la réalisation du problème, alors on a seulement la position « P » (A= 0). Puisque le premier coefficient peut seulement être ou ne pas être de signe variable, selon que A≠0 ou A = 0, et que l'on a prouvé par ailleurs que le signe ne peut être variable lorsque l'on se place en un minimum, alors A= 0. Techniquement parlant, tout se construit autour des inégalités qui jouent un rôle majeur pour la théorie des séries entières. Avec celles-ci, on est quelquefois contraint au raisonnement indirect pour aboutir à une égalité.

Ce raisonnement caractérise une situation où quelque chose que considère le mathématicien n'a pas à être construit, mais est seulement posé comme existant. Cauchy part de l'existence d'un minimum qu'il ne construit pas, et ne saurait d'ailleurs pas le construire en employant les moyens de la théorie des séries convergentes. De même, Argand ne sait pas construire le minimum au moyen de sa représentation géométrique, voire de l'algèbre de la théorie de l'élimination. De la même façon, ne sachant pas construire à la règle et au compas un cercle dont l'aire est donnée par une quatrième proportionnelle qu'il admet sans en faire plus d'état, Euclide fait un raisonnement par l'absurde, qui a pour nom l'exhaustion, pour prouver que les aires des cercles sont entre elles comme le carré des rayons. Aussi, l'emploi d'un raisonnement par l'absurde indique le plus souvent, sinon toujours, le contournement d'une méthode. Le qualifier d'indirect est très heureux pour signifier cet évitement.

Si l'emploi d'un tel raisonnement n'indique pas toujours que l'on soit contraint à un tel contournement, la force historique d'une théorie mathématique, ce qui en fait la postérité et le style, consiste à n'utiliser le raisonnement par l'absurde que dans des cas de contrainte. L'Analyse de Cauchy s'est bâtie avec une telle cohérence intellectuelle.

Aussi, si pour des questions de déduction logique, la place du théorème fondamental de l'algèbre ne pouvait pas être au début de l'*Analyse algébrique,* pour des questions de construction elle en marque bien la fin. Car un raisonnement par l'absurde est une défaite, comme Pascal a su le dire : s'en accommoder est une contrainte. Au sens où il faut chercher mieux, disposer de meilleurs outils. Les meilleurs outils pourraient être ceux du calcul différentiel et intégral. Dans la Note déjà mentionnée de l'*Analyse algébrique*, Cauchy expose les moyens connus de détermination numérique des racines, et fait voir qu'on peut y

[50] C'est seulement pour rassurer qu'a été calculé le premier terme dans le cas où le coefficient A possède une valeur nulle : il ne saurait y avoir de changement de signe de ce terme selon les valeurs de θ.

employer avec avantage la dérivée. Elle va jouer un rôle fondamental dans ses ouvrages ultérieurs. Mais elle ne pourra alors jouer que dans le cas des racines réelles.

La théorie des fonctions d'une variable complexe que Cauchy entreprend avec un grand succès à partir de 1824, a en partie pour but de combler le déficit constructif constaté de l'*Analyse algébrique* par rapport aux nombres complexes, aux racines de polynômes, et à la dérivée. La nouvelle théorie, celle des fonctions holomorphes, ou fonctions dérivables d'une variable complexe, accompagnée du calcul des résidus, donnait assez vite des renseignements fins sur les fonctions rationnelles, quotients de deux polynômes, et bien sûr sur les polynômes eux-mêmes. De ces fractions, la décomposition occupait l'avant dernier chapitre de l'*Analyse algébrique*, à la suite précisément et en déduction du théorème fondamental. Mais cette décomposition ne renseignait pas assez sur la théorie des fractions rationnelles. La théorie des fonctions holomorphes apporte beaucoup plus.

Le jeu très théorique de Cauchy avec les fonctions d'une variable complexe va contraindre à plus de géométrie ; il est alors normal que d'autres mathématiciens aient essayé de reprendre des méthodes numériques constructives, en tout cas pour certains types d'équations algébriques. Ils pourront le faire à la Cauchy, c'est-à-dire en acceptant de prendre comme outils des outils non élémentaires tels l'intégrale, qui joue un rôle majeur dans la théorie des fonctions holomorphes, quitte à les faire entrer en algèbre.

Ce surgissement des fonctions dérivables d'une variable complexe nous fait paradoxalement revenir à la source affichée par Cauchy pour le théorème fondamental de l'algèbre. À savoir le mathématicien Legendre, et son *Essai sur la Théorie des nombres*, sortie chez Courcier en 1796, et en seconde édition en 1808. La seconde édition ne mentionne pas Argand, ni d'ailleurs ne prétend que la démonstration d'Argand provienne du premier *Essai* de Legendre.

Premier Essai qui est un livre très riche pour ce qui ne porte plus le nom d'Arithmétique, car Legendre veut montrer la présence d'un raisonnement de type algébrique. Aussi ce n'est pas par hasard que Legendre rencontre le théorème fondamental et l'admet, au n° 115 de sa première partie (page 162) : « On sait que toute racine imaginaire d'une équation peut être représentée par $\alpha + \beta\sqrt{-1}$, α *et* β étant des quantités réelles ». Aussi, et pour une « équation générale »[51]

$$ax^n + bx^{n-1} + \ldots + hx + k = 0,$$

Legendre considère-t-il une autre écriture, $F(x) = P + \sqrt{-1}\, Q$, en partie réelle et partie imaginaire du polynôme, à partir de l'écriture eulérienne $x = \theta\left(\cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi\right)$.

$$\begin{aligned} P &= a\theta^n \cos n\varphi + b\theta^{n-1}\cos(n-1)\varphi + \ldots + h\theta\cos\varphi + k \\ Q &= a\theta^n \sin n\varphi + b\theta^{n-1}\sin(n-1)\varphi + \ldots + h\theta\sin\varphi. \end{aligned}$$

C'est aussi bien l'écriture de Cauchy, sauf que Cauchy envisage $P^2 + Q^2$.

Et par le calcul sur le développement trigonométrique, sans même souligner le résultat en tant que tel, Legendre détient la relation

$$\frac{\partial Q}{\partial\varphi} = \theta\frac{\partial P}{\partial\theta},$$
$$\frac{\partial P}{\partial\varphi} = \theta\frac{\partial Q}{\partial\theta}.$$

[51] Ici, « générale » veut en particulier dire que les coefficients a, b,…, k sont des réels quelconques, et pas seulement des entiers relatifs. Mais Legendre n'envisage pas des coefficients complexes.

Ce sont les relations qui traduisent la dérivabilité du polynôme en tant que fonction d'une variable complexe, lorsque les coordonnées polaires sont utilisées, et P et Q considérées comme des fonctions de θ (que l'on note aujourd'hui ρ) et φ. Et il est possible que Cauchy les ait ainsi lues. Mais pas pour sa démonstration du théorème fondamental de l'algèbre, plutôt pour son grand travail de 1824 sur les fonctions d'une variable complexe. Aussi en posant M et N pour respectivement la première et la deuxième ligne, Legendre dispose

$$P + M\frac{d\theta}{\theta} - Nd\varphi = 0,$$
$$Q + N\frac{d\theta}{\theta} + Md\varphi = 0.$$

Il a seulement transcrit F(z+dz) = F(z) + F'(z) dz en partie réelle et imaginaire et donc négligé les autres termes, afin de fixer F(z) + F'(z) dz = 0. L'idée, comme dans le cas réel (approximation de Newton), est que si F(z) est proche de 0, le z + dz ainsi déterminé rendra F(z+dz) encore plus proche de 0. Il n'y a aucun calcul montrant que cet espoir raisonnable est effectif : il faut dire qu'en égalant à 0 le rapprochement de zéro ne dépend que de la petitesse du reste, c'est-à-dire des termes en puissances supérieures à 1 de dz. Argand, par le module, montrait effectivement que ce reste ne modifiait pas l'inégalité de diminution du module. Il n'y a rien de tel chez Legendre.

Bien sûr, le calcul de Legendre donne explicitement le module dθ et l'argument $d\varphi$, dont il faut modifier *z* pour améliorer la proximité à zéro.

$$-\frac{d\theta}{\theta} = \frac{PM + QN,}{M^2 + N^2}$$
$$d\varphi = \frac{PN + QM}{M^2 + N^2}.$$

Cette formulation plaît à Legendre, car elle est voisine de ses calculs usuels d'approximation en fractions continues de racines. De telles approximations donnant des rationnels sont bien évidemment utiles pour un arithméticien.

> Ayant trouvé des valeurs plus approchées de θ et φ, on peut se servir de celles-ci pour en trouver de nouvelles qui soient encore plus approchées, et ainsi de suite, jusqu'à ce qu'on obtienne le degré d'exactitude dont les tables sont susceptibles[52].

Il exprime aussi ces formules en termes de $dx + \sqrt{-1}\,dy$ Et seule une remarque (non démontrée en fin de section) indique qu'il se soucie de la qualité de l'approximation numérique. Argand permet de calculer la quantité de l'approximation, mais voit que celle-ci est illusoire. Le raisonnement par l'absurde prend acte de cette réflexion. Ce n'est pas le Legendre de l'*Essai* qui a inspiré la preuve d'Argand. Cauchy n'a retenu de Legendre que l'écriture trigonométrique, qui manifeste le module dont Argand s'était si simplement servi.

---

[52] A.M. Legendre, *op. cit*., p. 166.

CONCLUSION

J'avais résolu de ne pas chercher à identifier un courant pérenne et un ordre propre du nombre, mais je ne voulais pas seulement attester la permanence de revendications disparates contre la pensée du continu. Car des questions ainsi posées ne pouvaient être que d'histoire, et pouvaient même ne tenir qu'à la division historique des mathématiques en domaines moins rivaux que distincts : arithmétique, géométrie, mécanique, algèbre, plus tard analyse, probabilités et statistiques. Si l'on reconnaît la variabilité dans le temps du contenu des domaines ainsi constitués, la division n'en paraît pas moins une constante des mathématiques. Elle est le long terme et le rangement des choses nouvelles se fait presque tout de suite dans un des domaines précités. Comme si l'on ne savait, ni ne pouvait imaginer d'autres divisions ! Le calcul différentiel et intégral entra presque tout de suite sous la dénomination de Géométrie, à laquelle on ajouta seulement l'adjectif « sublime » ou « transcendant ». En est-il sorti ? Oui, diront ceux qui ne voient que par les découpages universitaires. Mais quel mathématicien de la première moitié du XIX^e siècle, Chasles mis à part, mettrait la Géométrie hors l'Analyse ? Où donc placer le calcul numérique que l'intégrale permet ?

Sur le cas pour sûr particulier du métacentre et de la stabilité des vaisseaux, j'ai essayé de montrer un ordre numérique destiné à « peser » des coupes planes, dans le but de faire comprendre une solidité. Cet exemple n'a pas été retenu dans l'enseignement. Car au début du XIX^e siècle on préféra penser l'intégrale comme la deuxième face du différentiel, et le différentiel comme fondateur d'une discipline nouvelle, l'analyse mathématique. Il me semble que l'intégrale de Lebesgue, au tout début du XX^e siècle, a permis de renverser les rapports de l'intégrale et du différentiel, celui-ci devenant second, non en importance bien sûr, mais en difficulté. Et ainsi fut fondée l'analyse fonctionnelle. On peut « peser » les fonctions comme on « pesa » la solidité d'un bateau, et le calcul numérique est pensé en même temps que la théorie.

Ce n'est pas le point de vue de Frédéric Riesz, qui considérait que le théorème fondateur de la théorie de Lebesgue et de l'analyse fonctionnelle était un théorème de structure, énonçant la dérivabilité presque partout d'une fonction monotone. Quoiqu'il en soit de l'origine (sens psychologique, origine fondatrice, origine historique), ce n'est pas le « difficile » qui est venu avant le « facile » dans l'enseignement du XX^e siècle. Et ainsi on n'a pas renouvelé le mauvais sort fait au point de vue de Pierre Bouguer. Il me semble que la nouvelle attitude provient d'une meilleure perception du rôle de la pensée numérique. Il n'est pas besoin de partir d'un déclin de la pensée géométrique. L'invention du métacentre a bien été un fruit du numérique, et l'objet d'une revendication de son ordre. Comme je souhaitais en donner un exemple, après un questionnement d'épistémologie.

L'insuffisance de l'algèbre pour une démonstration de son théorème fondamental fut montrée au début du XIX^e siècle en recourant à une démonstration par l'absurde. L'objectif était d'établir que l'approximation, phénomène par nature numérique, discret, algorithmique si l'on veut, et dont on a vu l'importance pour l'intégrale de Bouguer, ne pouvait pas, de soi, promouvoir une preuve satisfaisante du théorème fondamental. Ce n'est pas seulement le théorème des valeurs intermédiaires qui a permis de donner sa place aux considérations sur le continu (car sur les nombres réels, ce théorème est facilement « constructif » au sens naïf du mot), mais il fallut aussi les nombres complexes et leur géométrie. Ce n'est donc pas par hasard que les années 1800 voient la représentation géométrique des nombres complexes ; mais ce n'est pas plus par hasard que celle-ci n'est pas admise par Cauchy. Il s'agissait pour lui de créer un genre nouveau, auquel on donnera enfin le nom d'Analyse (j'entends analyse tout court, et non pas analyse des infinis, analyse algébrique, etc.). Si donc l'Analyse n'est pas issue du numérique, et si sa conception comme nouveauté ne permit ni de la maintenir en géométrie ni de l'établir comme algèbre générale, elle devait néanmoins régir le numérique. Le mouvement ainsi créé avec le théorème fondamental de l'algèbre est très loin d'une arithmétisation ; mais paradoxalement il put la susciter, car j’inscris volontiers Bolzano et Dedekind dans la lignée critique de Cauchy.

Seule la démonstration du théorème fondamental par Argand peut donner à voir que s'ouvrait une nouvelle voie, qui permit la création de l'analyse, et non le retour de la géométrie en algèbre. Cette voie est largement tracée avec la démonstration du théorème d'Argand que Cauchy donna à son tour en 1821 dans un Cours procurant une forme particulière aux raisonnements ; c'est celle que l'on appelle depuis la rigueur de l'analyse. La forme porte toujours sur le corps des nombres complexes (mais elle n'est pas l'analyse complexe au sens que cette expression allait prendre et même spécialiser). En 1821, Cauchy rejeta la représentation géométrique des nombres complexes qu’avait introduite Argand, et ce n'est pas un rejet dû à la mode. Cauchy théorise, comme Argand.

On a pu imaginer que ces théorisations, ayant d’abord éprouvé une géométrisation momentanée, puis reniée, puissent au fond provenir de la pratique numérique sur les racines des équations, pratique autre que la théorie de l'élimination algébrique. Un tel point de vue, qui est naturel car à juste titre on accorde toujours plus à la pratique et à l’habitude qu’à l’innovation, est notoirement insuffisant, validé ni par l'histoire, ni par la mathématique. Il n’est pas toujours utile d'opposer une mathématique pratique et une mathématique théorique, une mathématique du concret numérique à une mathématique de l’abstrait conceptuel. L’exemple de Legendre a été utile pour éviter ces oppositions. La théorisation du théorème fondamental de l'algèbre ne fut pas un luxe de mathématicien : elle résulta d'une impossibilité constatée de la mathématique numérique d’alors. Il nous faut ainsi comprendre que la mise en analyse, et la rigueur, correspondit à une nécessité tactique des mathématiciens.

À la même époque, c’est au contraire un point de vue fondamentalement numérique qui permit à Fourier d’introduire les séries et l’intégrale qui portent son nom. On s’est longtemps cru obligé de reconnaître chez Fourier un « géomètre » peu soucieux de rigueur : c’est précisément la garantie d’une situation numériquement très convergente de l’équation de la chaleur qui lui faisait estimer devoir penser la convergence en d’autres termes et quasiment au sens des distributions. L’ordre numérique chez Fourier permettait de lancer une idée, qui ne se réalisera que beaucoup plus tard. Si l’histoire de la pensée numérique est aussi heurtée que l’histoire des mathématiques, c’est qu’il est difficile de les dissocier. Peut-on penser une mathématique sans calcul ?