DU NOMBRE PENSÉ A LA PENSÉE DU NOMBRE : QUELQUES ASPECTS DE LA PRATIQUE ARITHMÉTIQUE ARABE ET DE SES PROLONGEMENTS EN ANDALUS ET AU MAGHREB

Ahmed DJEBBAR (Paris)

INTRODUCTION

Dans l'Andalus et le Maghreb des IX^{e}-XV^{e} siècles, les activités qui concernent les nombres ont été un prolongement des différentes pratiques arithmétiques de l'Orient[1]. Il est donc nécessaire de rappeler brièvement ce que l'on sait aujourd'hui des sources de l'arithmétique arabe –appelée, à l'époque, "*Science du nombre*"- et des principales orientations qui se sont dessinées, à partir du IXe siècle, dans le cadre de cette discipline ou en dehors d'elle.

Comme pour la médecine, l'astronomie et le calcul, l'arithmétique a connu deux types de pratiques issues de deux traditions distinctes. L'une d'elles, la plus connue, est celle qui s'est nourrie de textes anciens, soit directement, soit par l'intermédiaire des traductions au syriaque et au persan, puis à l'arabe. Ces pratiques constituent le « savoir savant ». L'autre, beaucoup moins connue, est celle qui existait, dans chacun de ces domaines, avant la naissance et le développement du phénomène des traductions. Il s'agit de l'ensemble des procédés et des connaissances héritées des pratiques antérieures et qui constituaient le « savoir traditionnel ». Ce savoir permettait d'avoir des réponses plus ou moins satisfaisantes aux problèmes posés, sans accompagnements théoriques ni justifications répondant à des critères précis. Mais contrairement aux pratiques "populaires" des autres disciplines, celles de l'arithmétique qui appartiennent à ce fond n'ont rien "d'utilitaire" dans la mesure où elles ne sont constituées (tout au moins pour celles qui nous sont parvenues) que de problèmes ludiques ou ayant cette apparence. On trouve généralement ces problèmes regroupés sous une rubrique intitulée "les nombres pensés"[2]. On y apprend à "deviner", après une suite d'opérations arithmétiques exécutées mentalement, ce qui a été pensé par la personne interrogée et qui est encore inconnu du calculateur. Des procédés semblables permettent de deviner le nom d'une personne présente ou de retrouver un objet caché[3].

---

[1] - Des pratiques numériques existaient bien sûr en Méditerranée Occidentale avant l'avènement de l'Islam. Mais elles ont concerné le calcul, à travers ses différents supports : digital, mental, calcul de l'abaque et calcul rūmī utilisant 27 symboles. Sur ce dernier procédé qui a résisté plus longtemps à l'avènement du système décimal positionnel, voir Y. Guergour *: Les différents systèmes de numérotation au Maghreb à l'époque ottomane : l'exemple des chiffres rūmī*, Actes du XX^{e} Congrès International d'Histoire des Sciences (Liège, 20-26 juillet 1997), Volume VI, *Science, Technologie and Industry in the ottoman World*, A. Djebbar, E. Ihsanoglu & F. Günergun (édit.), Bruxelles, Brepols, 2000, pp. 67-74.

[2] - L'expression arabe utilisée dans les plus anciens textes qui nous sont parvenus est *aʿdād muḍmara*, c'est à dire *nombres cachés* sous entendu *dans la pensée* (et non encore divulgués à l'auditoire).

[3] - Les pratiques mathématiques à caractère ludique ne se sont pas limitées au domaine de l'arithmétique. Dans le chapitre du calcul, on trouve également un ensemble de problèmes récréatifs utilisant des algorithmes classiques. Voir H. Hermelink : *Arabic Recreational Mathematics as a Mirror of Age-Old Cultural Relations*

Quant à la seconde source, celle des écrits anciens qui vont bénéficier des traductions en arabe, elle se limite exclusivement à l'héritage grec et plus précisément à trois ouvrages : les *Eléments* d'Euclide (III[e] s. av. J.-C.), *l'Introduction arithmétique* de Nicomaque (II[e] s. ap. J.-C.) et une partie des *Arithmétiques* de Diophante (IV[e] s. ap. J.-C.). Le premier a bénéficié d'au moins trois traductions[4] mais, contrairement aux autres chapitres du traité, ceux qui y sont consacrés à l'Arithmétique, c'est à dire les Livres VII, VIII et IX, n'ont pas fait, à notre connaissance, l'objet de commentaires spécifiques de la part des mathématiciens d'Orient[5]. Le second ouvrage a été traduit deux fois en arabe, d'abord par Ḥabīb Ibn Baḥrīz (VIII[e]-IX[e] s.) puis par Thābit Ibn Qurra (IX[e] s.)[6]. Il a également bénéficié de commentaires et de rédactions abrégées, comme les écrits d'al-Kindī (m. 873), d'as-Sarakhsī (X[e] s.) et d'un anonyme du XI[e] siècle[7]. Le troisième ouvrage a été traduit en arabe, partiellement, par Qusṭā Ibn Lūqā (m. 910), beaucoup plus tard que les deux autres, et nous ne savons toujours pas si cette traduction (qui nous est parvenue sous le titre de "*Livre sur l'art de l'algèbre de Diophante*") a circulé en Occident musulman[8].

L'ARITHMETIQUE LUDIQUE

A partir des deux fonds bien distincts qui viennent d'être évoqués, les préoccupations et les activités arithmétiques arabes ont emprunté plusieurs voies. La première a été celle d'un regain d'intérêt pour les jeux arithmétiques avec, dès le IX[e] siècle, la publication d'épîtres

Between Eastern and Western Civilizations, Actes du Premier Colloque International d'Histoire des Sciences Arabes (Alep, 5-12 Avril 1976), Alep, 1977, Vol. II, pp. 44-52 ; A. Djebbar : *Matériaux pour l'étude des problèmes récréatifs de la tradition arabe*, Université d'été de Nantes, 12-13 juillet 1997. Ce chapitre a été inséré dans A. Djebbar : *Les mathématiques arabes par les textes*, Paris, Editions Ellipses. A paraître.

[4] - Deux traductions par al-Ḥajjāj et une troisième par Isḥāq Ibn Ḥunayn, révisée par Thābit Ibn Qurra. Voir A. Djebbar : *Quelques commentaires sur les versions arabes des Eléments d'Euclide et sur leur transmission à l'Occident musulman*, Actes du Colloque International "*Mathematische Probleme im Mittelalter, der lateinische und arabische Sprachbereich*" (Wölfenbüttel, 18-22 Juin 1990), M. Folkerts (édit.), Wiesbaden, Harrassowitz Verlag, 1996, pp. 91-114.

[5] - Mais leur contenu est expliqué, discuté, ou réécrit (au même titre que le contenu des autres livres) dans les nombreux commentaires qui ont été consacrés aux *Éléments* entre le IX[e] et le XIV[e] siècle.

[6]- La traduction de Ḥabīb Ibn Baḥrīz a été faite (à la fin du VIII[e] ou au début du IX[e]) à partir d'une version syriaque. Pour plus de détails, voir F. Sezgin : *Geschichte des arabischen Schrifttums*, vol. V., Leiden, Brill, 1974, pp. 164-166. Pour la traduction de Thābit Ibn Qurra, voir W. Kutsch : *Kitāb al-Mudkhal ilā ʿilm al-ʿadad* [Le livre introductif à la science du nombre], Beyrouth, 1958.

[7] - Al-Kindī : *Kitāb al-mudkhal ilā l-ʿadad* [Le livre introductif au nombre]; As-Sarakhsī : *Kitāb al-arithmāṭīqī fī l-aʿdād wa l-muqābala* [Le livre de l'Arithmétique sur les nombres et la comparaison]; Anonyme : *Ikhtiṣār Kitāb al-Arithmāṭīqī* [L'abrégé du Livre de l'Arithmétique], Ms. Rabat Ḥasaniya n° 4585. Pour le contenu de ce dernier écrit, voir A. Djebbar : *La tradition néo-pythagoricienne arabe à travers un écrit anonyme du XI[e] siècle*, à paraître. Sur certains aspects de la circulation de *l'Introduction Arithmétique* de Nicomaque, voir S. Brentjes : *La transmission arabe de l'Introduction Arithmétique dans des travaux non mathématiques au cours du IX[e] siècle*, Actes du 3[e] Colloque Maghrébin sur l'Histoire des Mathématiques Arabes (Tipaza 1-3 décembre 1990), Alger, 1998, partie I, pp. 23-29.

[8] - J. Sesiano : *The Arabic Text of Books IV to VII of Dophantus' Arithmetica in the translation of Qusṭā ibn Lūqā*, New York, Springer Verlag, 1981; Diophante : *Les Arithmétiques*, R. Rashed (édit. et trad.), Paris, les Belles Lettres, 1984.

consacrées entièrement ou partiellement à ces problèmes, comme celle du philosophe al-Kindī (m. vers 873)[9] et celle d'al-Anṭākī (X[e] s.)[10].

Une partie de ces jeux a également constitué un chapitre ou une section de certains ouvrages de calcul publiés en Orient. Parmi les écrits qui les contiennent sous cette forme, on peut citer, pour le XI[e] siècle, la *Takmila fī l-ḥisāb* [La complétion en calcul] d'al-Baghdādī (m. 1037)[11] et le *Fakhrī* d'al-Karajī (m. 1029)[12]; pour le XIII[e] siècle, la *ʿUmdat al-ḥussāb* [La référence des calculateurs] d'az-Zinjānī (m. 1257) et, pour le XIV[e] siècle, la *Maʿūna* [Le soutien] d'Ibn al-Hā'im (m. 1412).

Il est intéressant de découvrir, dans le lot de ces jeux arithmétiques, des variantes du problème des restes présentés tantôt sous forme de recherche d'un nombre pensé, tantôt sous forme abstraite consistant à déterminer un nombre dont les restes de sa division par certains nombres sont donnés. Les solutions exposées dans les livres de calcul se réduisent à une succession d'opérations, sans qu'aucune d'elle ne soit justifiée ou simplement commentée. Mais, il semble que c'est à partir de ce fond que des recherches théoriques ont été réalisées, comme le suggère une étude d'Ibn al-Haytham (m. 1041)[13].

Nous ne savons pas comment ces problèmes ont circulé d'Orient en Occident mais on en retrouve quelques spécimens (avec parfois des méthodes de résolution identiques) dans un ouvrage maghrébin peu connu, le *Talqīḥ al-afkār* [La fécondation des esprits] d'Ibn al-Yāsamīn (m. 1204). L'auteur qui a, semble-t-il, bénéficié d'une formation supérieure à Séville, expose dans son ouvrage des procédés pour déterminer un, deux ou trois nombres pensés (en étendant le procédé aux nombres fractionnaires). Avec ces mêmes procédés, il montre comment trouver un ou deux objets cachés[14]. Comme d'autres parties du livre le suggèrent, certains problèmes exposés dans le chapitre du *Talqīḥ al-afkār* sur les "nombres pensés" semblent avoir été empruntés à des ouvrages arabes d'Orient. Mais d'autres n'ont pas d'équivalents dans les écrits orientaux connus. Il est tout à fait possible, compte tenu de la place de Séville dans la formation scientifique d'Ibn al-Yāsamīn, que ce dernier, qui ne revendique aucun des procédés exposés ait repris des problèmes résolus par des mathématiciens d'al-Andalus.

---

[9] - Al-Kindī : *Risālā fī istikhrāj al-aʿdād al-muḍmara*, [Épître sur la détermination des nombres pensés], Ms. Istanbul, Aya Sofya, n° 4830, ff. 81a-86a.

[10] - Al-Anṭākī : *Risālā fī istikhrāj al-aʿdād al-muḍmara* [Épître sur la détermination des nombres pensés], Ms. Istanbul, Aya Sofya, n° 4830, ff. 35b-36b. Pour une édition et une analyse du contenu des épîtres d'al-Kindī et d'al-Anṭākī, voir A. Djebbar : *L'arithmétique ludique aux IX[e]-X[e] siècles*. A paraître.

[11]- A. S. Saïdan : Al-Baghdādī, *at-Takmila fī l-ḥisāb* [La complétion en calcul], Koweit, 1985, pp. 291-296.

[12]- A. S. Saïdan : *History of Algebra in Medieval Islam*, A Comparative Study, Part I, Algebra in Eastern Islam, Koweit, 1985, vol. I, pp. 223-224.

[13] - Ibn al-Haytham : *Qawl fī istikhrāj mas'ala ʿadadiya* [Propos sur la résolution d'un problème numérique], Ms. India Office Library, Loth 734, f. 121. Voir E. Weidemann : *Aufsätze zur Arabischen Wissenschaftsgeschichte*, Olms, 1970, Vol. I, pp. 529-531; Vol. II, p. 756; R. Rashed : *Entre arithmétique et algèbre*, Paris, Les Belles Lettres, 1984, pp. 238-243.

[14] - Sur certains aspects des nombres pensés dans la tradition maghrébine, voir A. Bouzari : *Procédures et circulation des nombres pensés entre l'Orient et l'Occident musulmans*, Actes du Colloque International « *De la Chine à l'Occitanie, chemins entre arithmétique et algèbre* » (Toulouse, 22-24 septembre 2000). A paraître.

L'ARITHMÉTIQUE THÉORIQUE

La seconde voie mathématique est celle des études théoriques sur les nombres. Dans l'état actuel de nos connaissances, on peut distinguer dans ce domaine trois orientations distinctes prolongeant les traductions et les premiers commentaires réalisés sur les ouvrages arithmétiques grecs que nous venons d'évoquer.

L'Arithmétique néopythagoricienne

La première orientation de la tradition arithmétique arabe concerne les suites et les séries numériques finies. Elle a commencé par l'étude des suites arithmétiques et géométriques et elle s'est poursuivie par celles d'autres séries d'entiers fournies par le tableau des nombres figurés que les mathématiciens ont découvert dans les traductions arabes de *l'Introduction arithmétique* de Nicomaque[15].

Tableau des nombres figurés										
Côtés	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Trigones	1	3	6	10	15	21	28	36	45	55
Tétragones	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100
Pentagones	1	5	12	22	35	51	70	92	117	145
Hexagones	1	6	15	28	45	66	91	120	153	190
Heptagones	1	7	18	34	55	81	112	148	189	235
Octogones	1	8	21	40	65	96	133	176	225	280
Ennéagones	1	9	24	46	75	111	154	204	261	325
Décagones	1	10	27	52	85	126	175	232	297	370

En Orient, cet intérêt pour les nombres figurés est confirmé, au X^{e} siècle, par les écrits mathématiques d'al-Anṭākī et d'Ibn Sīnā (m. 1037) et par l'évocation de l'encyclopédiste Abū ᶜAbdallah al-Khwārizmī[16]. Mais, la matière de ces ouvrages ne permet pas de reconstituer les débuts et les premiers développements des recherches entreprises. On sait seulement qu'au centre de l'empire musulman cette tradition s'est maintenue dans l'enseignement tout au long des siècles suivants, comme en témoignent les écrits d'al-

---

[15] - Si $P_m(n)$ est le nombre qui se trouve à l'intersection de la $(m-1)^{\text{ième}}$ ligne et de la $n^{\text{ième}}$ colonne, il est donné par les formules suivantes : $P_3(n) = n + P_3(n-1)$; $P_m(n) = P_3(n-1) + P_{m-1}(n)$ pour $m \geq 4$ et $n \geq 2$. Sur le plan géométrique, $P_m(n)$ correspond au polygone à m côtés, chaque côté étant constitué de n points.

[16]- Al-Anṭākī (G.A.S., V, p. 30) a écrit *Kitāb tafsīr al-Arithmāṭīqī* [Livre sur le commentaire de l'Arithmétique] qui est bien un commentaire de *l'Introduction Arithmétique* de Nicomaque. Seule la troisième partie nous est parvenue (ms. Ankara Saip 5311, ff. 1b-36a). Ibn Sīnā : *Kitāb ash-Shifā, al-Arithmāṭīqī* [Livre de la guérison, l'Arithmétique], édition A.L. Muzhir, Le Caire 1975, pp. 53-61; al-Khwārizmī : *Kitāb Mafātīḥ al- ᶜUlūm* [Livre des clefs des sciences], édition G. Van Vloten, 1895, réédition E.J. Brill, 1968, pp. 188-191.

Baghadādī au XI^e siècle, d'at-Tannūkhī ou d'Ibn al-Hā'im au XIV^e et d'Ibn al-Majdī au XV^e[17].

En ce qui concerne l'Occident musulman, les traces les plus anciennes qui nous soient parvenues se trouvent dans une paraphrase de *l'Introduction arithmétique* de Nicomaque attribuée à Rabī^c Ibn Yaḥyā al-Usquf (X^e s.) qui aurait été évêque d'Elvira en Espagne[18]. Sur le XI^e siècle, d'autres informations nous sont fournies par Ibn Mun^cim (m. 1228) dans son *Fiqh al-ḥisāb* [La science du calcul][19]. En préambule à la section intitulée *La neuvième espèce sur les figures numériques*, cet auteur donne des informations très utiles sur sa contribution personnelle et sur celles de mathématiciens andalous des XI^e-XII^e[20]. Nous apprenons ainsi que le thème des nombres figurés a été longuement traité par les arithméticiens avant lui qui auraient réalisé des travaux originaux dans ce domaine[21]. A cette occasion, deux auteurs nous sont cités : Ibn Sayyid, le géomètre du XI^e siècle[22] et ^cAbd al-Ḥaqq Ibn Ṭāhir, probablement du XII^e siècle.

Quant au contenu du chapitre du *Fiqh al-ḥisāb* consacré aux nombres figurés, il est dans la continuité des études antérieures connues : détermination des éléments d'une ligne ou d'une colonne, calcul du côté d'une figure connaissant sa valeur, étude des séries arithmétiques obtenues en sommant les éléments de chaque ligne, calcul des sommes des polygones pairs ou impairs de chaque espèce en tenant compte de la parité du nombre de leurs côtés.

Mais l'intérêt de ce chapitre d'Ibn Mun^cim est essentiellement dans les démarches utilisés pour établir les résultats. En effet, sur le plan technique, il faut signaler l'introduction de l'algèbre dans la résolution d'un problème arithmétique qui aboutit à une équation du second degré[23], la manipulation de suites arithmétiques dont les raisons sont des polynômes en n et

---

17- Al-Baghdādī : *Kitāb at-Takmila fī l-ḥisāb* [Livre de la complétion sur le calcul], A. S. Saidan (édit.), Koweit, 1985, pp. 185-189; A.S. Saidan : *Number theory and series summations in two arabic texts*, Proceedings of the first international symposium for the history of arabic science (Avril, 5-12, 1976), Alep, I.H.A.S., 1978, vol. II, pp. 155-158; At-Tannūkhī : *Kitāb fī ^cilm al-^cadad* [Livre sur la science du nombre], ms. Ankara Saip 5311, ff. 50a-52b ; Vatican 317/1^c, ff. 76b-77b; Ibn al-Hā'im : *al-Ma^cūna* [Le soutien], ms. Tunis 8918, ff. 19a-21b; Ibn al-Majdī : *Ḥāwī l-Lubāb* [Le recueil de la moelle], ms. Brit. Mus. Add. 7469, ff. 21b-29a.

18- Selon Steinschneider, ce livre est une paraphrase (mais un commentaire selon Renan) de *l'Introduction Arithmétique* de Nicomaque. Il a été traduit en hébreu par Kalonymos ibn Kalonymos en 1316-17. Voir M. Steinschneider : *Mathematik bei den Juden*, 1893-99, réédition Georg Olms Verlag, 1964, p. 125 et E. Renan : *Les écrivains juifs français du XIV^e siècle*, Paris, 1893, p. 436.

19- A. Djebbar : *L'analyse combinatoire au Maghreb : l'exemple d'Ibn Mun^cim (XII^e-XIII^e) siècle*, Paris, Université Paris-Sud, Publications mathématiques d'Orsay, 1985, n° 85-01.

20- Ibn Mun^cim : *Fiqh al-ḥisāb* [La science du calcul], Ms. Rabat B. G. n° 416 Q, pp. 297-315. Le préambule est entre p. 297, ligne 27 et p. 298, ligne 19.

21- Voici ce qu'en dit Ibn Mun^cim (*Fiqh al-ḥisāb*, op. cit. pp. 297-298) :

> Lorsque j'ai eu l'idée de rédiger, pour mon livre, cette partie sur les figures numériques, j'ai étudié les propos des Arithméticiens et j'ai vu que leur livres traitaient longuement ce sujet.

22- Sur l'importance d'Ibn Sayyid comme géomètre, voir A. Djebbar : Deux mathématiciens peu connus de l'Espagne du XI^e siècle : al-Mu'taman et Ibn Sayyid, M. Folkerts & J.P. Hogendijk (édit.) : Vestigia Mathematica, Studies in medieval and early modern mathematics in honour of H.L.L. Busard, Amsterdam-Atlanta, GA 1993, pp. 79-91.

23 - On retrouve une démarche identique chez le mathématicien d'Orient al-Fārisī (m. vers 1320) dans son étude sur les nombres premiers. Voir R. Rashed : *Entre arithmétique et algèbre*, op. cit., p. 283.

enfin, l'utilisation de tableaux pour écrire des expressions polynomiales en *n*, à la manière des algébristes orientaux du XII^e siècle[24]. Dans le même temps, on remarque, dans son exposé, la persistance du vocabulaire géométrique originel dans les définitions et dans la description de certaines propriétés des nombres figurés[25].

Sur le plan du raisonnement, on observe le souci d'Ibn Mun^c^im d'éviter, chaque fois que cela lui est possible, d'établir ses résultats par induction. Il s'efforce d'utiliser l'analyse et la synthèse comme méthode de démonstration et, comme outils intermédiaires, des propositions établies selon ce procédé et empruntées aux *Eléments* d'Euclide ou au *Kitāb al-Istikmāl* [Le livre de la complétion] d'al-Mu'taman (m. 1085)[26]. Ce souci de rigueur va d'ailleurs l'amener à établir, dans la huitième espèce de son livre, une série de propositions concernant la sommation de nouvelles sous-suites de la suite des entiers ainsi que de leurs carrés[27].

Après le XII^e siècle, l'ouvrage d'Ibn Mun^c^im a dû vraisemblablement fait l'objet d'étude comme le laisse supposer la contribution d'Ibn al-Bannā' (m. 1321) dans son *Raf^c^ al-ḥijāb* [Le lever du voile][28]. Comparé à celui d'Ibn Mun^c^im, l'exposé d'Ibn al-Bannā apparaît à la fois comme un résumé et un complément. En effet, la partie originale du *Fiqh al-ḥisāb*, c'est à dire celle qui concerne les sous-suites de nombres-polygones, disparaît totalement, probablement à cause de sa longueur et de son « *peu d'utilité* », comme le pensait Ibn al-Bannā' à propos d'autres questions théoriques[29]. Mais, elle est remplacée par une analyse originale d'une partie du tableau des nombres figurés. En effet, on y trouve une tentative de rattacher, par l'intermédiaire du tableau de Nicomaque, le chapitre naissant de la combinatoire à celui, bien classique, de la théorie des nombres[30]. Par ailleurs, Ibn al-Bannā

---

[24]- Ibn Mun^c^im donne sept tableaux permettant d'avoir l'expression de ces sommes. Voir Ibn Mun^c^im : *Fiqh al-ḥisāb*, op. cit. p. 309.

[25]- Ibn Mun^c^im utilise les termes suivants : nombre ligne, nombre plan, nombre solide, côté, triangle équilatéral, figure équilatérale, figure tronquée, gnomon.

[26]- Dans son préambule à la 8^e espèce, Ibn Mun^c^im dit (*Fiqh al-ḥisāb*, op. cit. p. 256) :

> Il est nécessaire, pour celui qui veut étudier cette partie, de connaître d'abord la première espèce du premier genre du livre d'al-Mu'taman, [car] sans cela, le livre d'Euclide n'est pas suffisant pour celui qui veut étudier cette partie.

Au sujet d'al-Mu'taman, voir A. Djebbar : Deux mathématiciens peu connus de l'Espagne du XI^e siècle : al-Mu'taman et Ibn Sayyid, op. cit. ; J. P. Hogendijk : Discovery of an 11th century geometrical compilation : The Istikmāl of Yūsuf al-Mu'taman Ibn Hūd, King of Saragossa, Historia Mathematica **13** (1986), 43-52. Pour le contenu de la partie arithmétique du *Kitāb al-istikmāl* d'al-Mu'taman, voir A. Djebbar : Les livres arithmétiques des Eléments d'Euclide dans une rédaction du XI^e siècle : le Kitāb al-istikmāl d'al-Mu'taman (m. 1085), *Lull*, Saragosse, Vol. 22, n° 45 (1999), pp. 589-653.

[27]- Ibn Mun^c^im, *Fiqh al-ḥisāb*, op. cit. pp.255-297.

[28]- A. Djebbar : *Enseignement et recherche mathématiques dans le Maghreb des XII^e-XIII^e*, Paris, Université Paris-Sud, Publications mathématiques d'Orsay, 1980, n° 81-02, pp. 76-89.

[29]- M. Aballagh : *Raf^c^ al-ḥijāb d'Ibn al-Bannā*, Thèse de Doctorat, Université de Paris I-Pantheon-Sorbonne, 1988, p. 543.

[30] - Sur les contributions d'Ibn Mun^c^im et d'Ibn al-Bannā en combinatoire, voir A. Djebbar : *Enseignement et Recherche mathématiques dans le Maghreb des XIII^e-XIV^e siècles*, Paris, Université Paris-Sud, Publications Mathématiques d'Orsay, 1980, n° 81-02, pp. 55-112; A. Djebbar : *L'analyse combinatoire au Maghreb :*

réhabilite, dans ce chapitre du *Raf^c al-ḥijāb*, le raisonnement inductif puisque, à l'inverse d'Ibn Mun^cim, il utilise les propriétés du tableau (toutes obtenues par induction) pour calculer certaines séries numériques[31].

Au XIV^e siècle, on trouve des références précises aux nombres figurés chez Ibn Haydūr (m. 1413), un commentateur de *l'Abrégé du calcul* d'Ibn al-Bannā. D'ailleurs le fait d'en trouver également une évocation rapide dans un ouvrage non mathématique, comme les *Prolégomènes* d'Ibn Khaldūn (m. 1406), laisse supposer qu'à son époque ce sujet était encore enseigné par les professeurs de mathématique du Maghreb[32]. Mais les commentateurs d'Ibn al-Bannā', qui sont aussi les principaux mathématiciens maghrébins des XIV^e-XV^e siècles (à l'exception d'Ibn al-Majdī qui est égyptien), se sont contentés de paraphraser le chapitre sur les nombres figurés du *Raf^c al-ḥijāb*, ou bien ils ont tout simplement abandonné le sujet[33].

Pour conclure, il faut observer que les contributions à l'étude des nombres figurés que nous avons évoquées, ne représentent qu'une partie de ce qui a pu être produit dans le prolongement de *l'Introduction Arithmétique* de Nicomaque. C'est ce qui ressort clairement du préambule d'Ibn Mun^cim à la neuvième espèce de son livre[34]. On peut donc raisonnablement penser que, sur le plan de la recherche, les mathématiciens andalous se sont posé des problèmes nouveaux en partant des acquis de la tradition grecque et des contributions arabes d'Orient dont il nous reste quelques traces chez Ibn Sīnā[35]. Les résultats reproduits par Ibn Simāk al-Umawī (c.a. 1353), un mathématicien d'origine andalouse ayant enseigné à Damas, pourraient être les témoins d'une activité originale bien antérieure[36].

---

l'exemple d'Ibn Mun^cim (XII^e-XIII^e siècles), Paris, Université Paris-Sud, Publications Mathématiques d'Orsay, 1985, n° 85-01.

[31] - $P_m(n)$ étant le nombre-polygone à m côtés, chaque côté étant de longueur n, on a :

$1 + 3 + ... + 2n - 1 = P_m(1) + ... + P_m(2n - 1)$

$2 + 4 + ... + 2n = P_3(1) + ... + P_m(2n)$

$1^2 + 2^2 + ... + n^2 = P_4(1) + ... + P_4(n)$

$1^3 + 3^3 + ... + (2n - 1)^3 = (P_3(n))^2$

On trouve également, dans le *Raf^c al-Ḥijāb*, l'étude des suites de.terme général $\frac{1}{n}P_m(n)$ et de raison $\frac{n-1}{2}$ (si n est fixe et m variable) ou de raison $\frac{m-2}{2}$ (si m est fixe et n variable). Voir A. Djebbar, *Enseignement et recherche...*, op. cit., pp. 90-93.

[32]- Ibn Khaldūn : *al-Muqaddima* [L'introduction], Dār al-Kitāb, Beyrouth 1967, pp. 895 et 897.

[33]- Ibn Haydūr traite longuement le sujet dans *Tuḥfat aṭ-ṭullāb* [La parure des étudiants] (ms. Vatican, Or 1403, ff. 38b-48a) et dans *at-Tamḥīṣ* (ms. Rabat al-Ḥasaniya n°252, pp. 99-107). Ibn al-Majdī en fait de même dans son *Ḥāwī l-lubāb* (op.cit.). Par contre, Ibn Ghāzī, Ibn Zakariyā', Ibn Qunfudh, al-Huwārī et al-^cUqbānī ne disent rien sur le sujet.

[34] - Ibn Mun^cim, *Fiqh al-ḥisāb*, op. cit., pp. 297-298.

[35]- En particulier la recherche des nombres polygones vérifiant : $P_m(n) = P_{m'}(n')$; $m \neq m'$ et $n \neq n'$ et la relation entre nombres parfaits et nombres-polygones. Voir Ibn Sīnā : *Kitāb ash-Shifā, al-Arithmāṭīqī*, op. cit. pp. 56-57.

[36]- A. S. Saidan : *Marāsim al-intisāb fī ma^cālim al-ḥisāb* [Les marques de l'adhésion dans les signes du calcul], Alep, I.H.A.S., . On y trouve l'expression des sommes suivantes :

$1 \times 2 + ... + (n - 1) \times n$

Le second chapitre où ont été manipulées des suites d'entiers est celui du calcul des séries finies qui ne découlent pas du tableau des nombres figurés. Ibn Mun^{c}im en traite longuement dans une section indépendante intitulée « *Les nombres successifs, leurs propriétés selon leur ordre naturel et la sommation de leurs espèces de pairs -comme les pairement-pairs, les pairement-impairs et les pairements-pairs-impairs-, de leurs impairs, des carrés de tout cela et de leurs cubes* »[37]. Comme son titre l'indique, cette section est une extension de certains résultats, bien connus à l'époque, aux suites d'entiers pairs selon les définitions de Nicomaque. Mais, là aussi, l'intérêt de cette contribution est moins dans les résultats que dans la démarche de l'auteur. En effet, s'écartant délibérément de ses prédécesseurs qui avaient démontré les propositions arithmétiques à l'aide du raisonnement inductif, Ibn Mun^{c}im s'efforce, sans réussir complètement d'ailleurs, de n'utiliser que le raisonnement par analyse et par synthèse. En adoptant cette démarche, il ne fait qu'appliquer ce qu'aurait dit al-Mu'taman (qui est souvent cité dans le *Fiqh al-ḥisāb*) :

> La justification démonstrative d'une chose cherchée a lieu selon deux manières, ou bien par la voie de l'analyse ou bien par la voie de la synthèse[38].

De cet ensemble de recherches et de pratiques que nous venons d'exposer brièvement, il ne restera finalement que la partie qui traite de la sommation de suites finies d'entiers (somme des entiers naturels, des pairs, des impairs, de leurs carrés, de leurs cubes, de leurs puissances quatrième). A ce propos, il faut noter que le thème des séries finies, qui survivra dans les manuels maghrébins de calcul comme illustration du chapitre de l'addition et de la multiplication, ne semble pas avoir comme origine la seule tradition néo-pythagoricienne. Il est possible aussi qu'il provienne de deux autres traditions : celle qui se rattache aux pratiques mathématiques orientales "locales", antérieures aux traductions, et celle qui découle des travaux sur la mesure des aires et des volumes par la méthode d'exhaustion, (plus particulièrement à travers les travaux de Thābit Ibn Qurra sur l'aire de la parabole et sur le volume du paraboloïde ainsi que ceux d'Ibn al-Haytham sur les volumes de la sphère, du paraboloïde et du fuseau parabolique)[39]. Mais, compte tenu du silence des sources disponibles au sujet de la circulation en Occident musulman des travaux des auteurs que nous venons de citer, c'est la tradition locale, enrichie de celle de Nicomaque, qui a probablement alimenté les manuels maghrébins qui traitent de ce sujet.

L'Arithmétique euclidienne

$2 \times 4 + \ldots + 2(n-1) \times 2n$

$1 \times 3 + \ldots + (2n-3)(2n-1)$

On trouve également (en notant $S_3(n) = P_3(1) + \ldots + P_3(n)$), les relations suivantes :

$$P_3(1) + \ldots + P_3(n) = (\frac{n}{3} + \frac{2}{3})P_3(n) \text{ et } S_3(1) + \ldots + S_3(n) = (\frac{n}{4} + \frac{3}{4})S_3(n)$$

La première est donnée par Ibn al-Bannā, la seconde n'existe dans aucun ouvrage antérieur au XIV^{e} siècle, comme l'avait déjà remarqué A.S. Saidan (op. cit., pp. 127-128). Elle est intéressante pour la forme de l'expression du second membre qui pouvait suggérer une généralisation de cette relation. On sait que Fermat énoncera cette généralisation, en ajoutant :

> J'estime qu'on ne peut énoncer, sur les nombres, de théorème qui soit plus beau ou plus général. Je n'ai ni le temps ni la place d'en mettre la démonstration sur cette marge .

Voir P. Tannery & Ch. Henry : *Œuvres de Fermat*, Paris, 1894, t. III, p.273.

[37] - Ibn Mun^{c}im : *Fiqh al-ḥisāb*, op. cit., pp. 255-297.

[38] - Op. cit., p. 215.

[39] - A. P. Youschkevitch : *Les Mathématiques arabes (VIII^{e}-XV^{e} siècles)*, Paris, Vrin, 1976, pp. 123-131.

La seconde orientation arithmétique arabe s'inscrit dans le prolongement des livres VII, VIII, IX des *Éléments* d'Euclide. Elle a concerné l'étude des nombres premiers et elle a débuté avec les travaux de Thābit Ibn Qurra (m. 901) sur les nombres amiables[40]. Elle s'est poursuivie avec ceux d'Ibn al-Haytham, d'al-Fārisī et probablement d'autres mathématiciens dont les écrits n'ont pas encore été exhumés[41]. Mais, la seule contribution dont on a trouvé des traces en Andalus et au Maghreb est celle de Thābit Ibn Qurra. Le texte le plus ancien qui en témoigne se trouve dans la première partie de l'ouvrage que nous allons maintenant présenter.

Une synthèse andalouse du XI^e^ siècle

A la fin du XI^e^ siècle, le roi de Saragosse al-Mu'taman Ibn Hūd (1081-1085) a entrepris la rédaction d'un traité imposant par son volume et par son contenu, le *Kitāb al-istikmāl* [Le livre de la complétion]. L'importance de cet ouvrage pour l'histoire de la tradition mathématique d'al-Andalus et du Maghreb a été déjà signalée et certains de ses chapitres ont déjà fait l'objet d'une série d'études[42].

C'est la partie de l'ouvrage consacrée à l'arithmétique qui nous intéresse ici. Elle est intitulée "*La première espèce du premier genre parmi les deux genres des sciences mathématiques, sur la connaissance des propriétés des nombres séparément et en relation <les uns avec les autres>*". Elle précède quatre autres chapitres qui sont consacrés à la géométrie et qui composent avec lui le premier genre[43].

Cette partie est divisée en quatre sections correspondant aux différents points de vue selon lesquels les propriétés des nombres devaient être appréhendées et étudiées : des propriétés intrinsèques, des propriétés découlant des nombres, en tant qu'ils sont rapportés les uns aux autres, ou en tant qu'ils sont semblables aux lignes aux surfaces et aux volumes, ou en tant qu'ils sont rapportés à leurs parties. Il faut tout de suite préciser, à propos de cette division, qu'elle n'est pas spécifique au chapitre arithmétique de *l'Istikmāl*.

La première section commence par une présentation du système décimal suivie d'un ensemble de notions communes, d'axiomes et de définitions. Les notions communes sont celles du Livre I des *Eléments*[44]. Les axiomes, qui sont au nombre de deux, sont empruntés à

---

[40] - Deux nombres sont dits amiables si la somme des diviseurs de l'un est égale à l'autre. Sur le contenu de l'épître d'Ibn Qurra, voir A. S. Saïdan : *Kitāb al-a'dād al-mutaḥābba li Thābit Ibn Qurra*, [Livre des nombres amiables de Thābit Ibn Qurra], Amman, 1977; F. Woepcke : Notice sur une théorie ajoutée par Thābit ben Korrah à l'arithmétique spéculative des Grecs, *Journal Asiatique*, 4^e^ série, Vol. 20 (1852), pp. 420-429.

[41] - R. Rashed : *Entre arithmétique et algèbre*, op. cit., pp. 227-243, 259-299.

[42] - Voir la bibliographie générale à la fin de cette étude.

[43]- Le second genre devait être consacré aux applications des outils mathématiques exposés dans le premier genre. Mais il semble qu'al-Mu'taman n'a pas pu achever sa rédaction. Sur le détail de la table des matières du second volume, voir A. Djebbar : La rédaction de l'Istikmāl d'al-Mu'taman (XI^e^ s.) par Ibn Sartāq un mathématicien des XIII^e^-XIV^e^ siècles, *Historia Mathematica*, n° 24 (1997), pp. 185-192.

[44]- Huit de ces notions sont une simple reprise de celles d'Euclide. La neuvième, qui concerne l'égalité arithmétique, se substitue à celle du Livre I sur l'égalité géométrique basée sur la coïncidence des figures. Elle est énoncée ainsi :

> Si deux choses sont telles que chacune d'elles est plus grande que tout ce par rapport à quoi l'autre est plus grande et plus petite que tout ce par rapport à quoi l'autre est plus petite, alors elles sont égales.

Nicomaque[45]. Quant aux définitions, elles sont, en majorité, tirées du Livre VII des *Eléments* et de *l'Introduction Arithmétique* de Nicomaque[46]. Les propositions, elles, sont au nombre de 47. 8 d'entre elles sont une extension de 10 propositions du Livre II des *Eléments* au domaine des entiers[47]. L'idée d'arithmétiser les propositions du Livre II n'est pas nouvelle dans la tradition mathématique arabe. On la trouve, en particulier, dans le commentaire d'an-Nayrīzī (IXe-Xe s.) aux *Eléments*[48] et dans les *Epîtres* des Ikhwān aṣ-Ṣafā' (Xe s.)[49]. Il est possible qu'al-Mu'taman se soit inspiré de l'un ou l'autre de ces écrits. En ce qui concerne l'ouvrage d'an-Nayrīzī, aucune source connue ne confirme explicitement sa présente en Andalus. Ce qui n'est pas le cas des Epîtres puisque le témoignage du biobibliographe du XIe siècle, Ṣāᶜid al-Andalusī nous assure que la première copie de cette encyclopédie est arrivée à Saragosse (la ville d'al-Mu'taman) avant 1065, date de la mort du géomètre Ibn Ḥayy qui l'avait ramenée d'Orient[50].

Quant aux propositions dont le lien avec les *Eléments* n'est pas établi, 9 n'ont pas une origine clairement identifiée et on ne peut avancer que des hypothèses prudentes et provisoires à leur sujet[51]. Certaines d'entre elles ne semblent être rattachées à aucun résultat antérieur connu. Elles peuvent donc avoir été empruntées à des traités mathématiques arabes qui ne nous sont pas parvenus. Mais elles peuvent être, tout aussi bien, attribuées à al-Mu'taman lui-même qui aurait été amené à les établir pour les besoins de la cohérence interne de la section, en particulier au niveau de sa structure déductive.

La deuxième section du chapitre arithmétique de *l'Istikmāl* commence par des définitions qui sont, pour la plupart, une arithmétisation de définitions du livre V des *Eléments* ou une reprise de définitions du Livre VII ou de celles de Nicomaque. Seules deux définitions n'ont pas pu être rattachées à des sources connues. En ce qui concerne les propositions, elles reprennent certaines des Livres VII, VIII et IX des *Eléments* ou sont une arithmétisation de résultats établis dans le Livre V pour les grandeurs en général[52].

45- A_1 : La première partition par laquelle se subdivise le nombre est qu'il y en a qui sont pairs et il y en a qui sont impairs ; A_2 : Tout nombre est soit premier soit composé. Voir W. Kutsch, *Kitāb al-Mudkhal ilā ᶜilm al-ᶜadad*, op. cit., pp. 19, 29 ; J. Bertier : Nicomaque de Gérase, Introduction Arithmétique, Paris, Vrin., 1978, pp. 60, 69.

46- Sur les 15 définitions, deux semblent avoir été ajoutées par al-Mu'taman. Il s'agit des suivantes: D_3 : Les nombres qui se succèdent selon l'ordre naturel sont ceux qui commencent par un et qui augmentent par lui. D_9: On dit que le plus petit nombre nombre le plus grand s'il y a dans le plus grand des exemplaires égaux du plus petit nombre.

47- Il s'agit bien, dans l'esprit d'al-Mu'taman, d'une extension à un domaine distinct, car ces mêmes propositions sont énoncées et établies, pour les grandeurs, dans la 1e section de la 2e espèce de son traité.

48 - An-Nayrīzī : *Sharḥ kitāb Uqlīdis* [Commentaire du Livre d'Euclide], Ms. Leiden Or. 399/1, ff. 25a-31b.

49- Ikhwān aṣ-Ṣafā' : *Rasā'il* [Epîtres], Beyrouth, édition non datée, Vol. I, pp. 72-75.

50- Ṣāᶜid al-Andalusī : *Kitāb ṭabaqāt al-umam* [Livre des catégories des nations], H. Buᶜalwān (édit.), Beyrouth, Dār aṭ-ṭalīᶜa, 1985, p. 172.

51- Les propositions restantes peuvent être regroupées en trois catégories : 19 d'entre elles correspondent à 22 propositions du Livre VII et 11 correspondent à 12 propositions du Livre IX.

52- La plus importante de ces propositions est celle où al-Mu'taman établit, pour les rapports d'entiers, une équivalence entre la définition de la proportionnalité numérique et celle de la proportionnalité des grandeurs données séparément par Euclide dans les *Eléments*. Voir B. Vitrac : *Euclide, Les Eléments*, Volume II, Paris, Presses Universitaires de France, 1994, pp. 41, 262-268.

La troisième section ne comporte aucune définition. Quant aux propositions, elles sont reprises exclusivement des Livres VIII et IX des *Eléments*[53]. La quatrième et dernière section est composée essentiellement des propositions de l'écrit de Thābit Ibn Qurra intitulé *Epître sur les nombres amiables*[54]. Les seules modifications qu'introduit al-Mu'taman dans la rédaction de cette épître ont consisté à supprimer son introduction, concernant l'histoire des nombres parfaits et amiables dans la tradition grecque, et à regrouper les propositions 7 et 8 de l'épître en une seule[55].

La circulation du livre d'al-Mu'taman, d'abord en Andalus puis au Maghreb, semble avoir été à l'origine de préoccupations relatives aux nombres amiables chez certains mathématiciens postérieurs au XI^e siècle. Le plus ancien parmi les auteurs connus est al-Ḥaṣṣār (XII^e s.). Le second volume, non encoure retrouvé, de son *Kitāb al-kāmil fī l-ḥisāb* [Livre complet sur le calcul] a contenu un chapitre qui traite des nombres amiables[56]. Seule la table des matières de ce volume a été retrouvée mais, selon le témoignage d'Ibn Mun^cim, qui en a cité des passages dans son *Fiqh al-ḥisāb*, al-Ḥaṣṣār utilise l'algorithme d'Ibn Qurra pour calculer, explicitement, les deux couples (220,284) et (17296,18416)[57]. On retrouve ce calcul chez al-Qāḍī ash-Sharīf (m. 1283), un élève d'Ibn Mun^cim, puis chez un auteur anonyme qui semble être al-Ghurbī, un commentateur peu connu du fameux manuel d'Ibn al-Bannā (m. 1321), *Talkhīṣ a^cmāl al-ḥisāb* [L'abrégé des opérations du calcul][58].

---

[53]- Sur les 17 propositions de cette section, 12 proviennent du *Livre VIII* et 4 regroupent 10 propositions du *Livre IX*. Une seule a été ajoutée par al-Mu'taman. Elle s'énonce ainsi :

> Si le rapport de deux nombres n'est pas celui de deux carrés, il n'y a pas entre eux un nombre qui leur est proportionnel.

[54] - Les quatre premières propositions sont reprises du *Livre IX* des *Eléments*. Les 9 restantes correspondent exactement aux 10 propositions de l'épître d'Ibn Qurra.

[55]- A moins que la version de l'épître d'Ibn Qurra utilisée par al-Mu'taman n'ait pas contenu cette introduction. Il nous est d'ailleurs parvenu une copie avec introduction (Ms. Paris B.N. 2457, ff. 170-180) et une qui en est dépourvue (Ms. Istanbul Aya Sofya 4830, ff. 110a-122b).

[56]- M. Aballagh & A. Djebbar : Découverte d'un écrit mathématique d'al-Ḥaṣṣār (XII^e s.) : le Livre I du Kāmil, *Historia Mathematica* 14 (1987), p. 155. Le chapitre en question est intitulé "*Sommation des suites de nombres ayant un rapport géométrique, détermination des nombres parfaits, amiables, et duplication des cases de l'échiquier*".

[57]- Ibn Mun^cim : *Fiqh al-ḥisāb*, op. cit., pp. 319-321.

[58]- Le texte de l'auteur anonyme a été édité par M. Souissi qui l'a attribué à Ibn al-Bannā. Mais, il paraît plus prudent de l'attribuer à un de ses commentateurs. Ce dernier pourrait être Muḥammad al-Ghurbī (ca. 1349), l'auteur de l'ouvrage intitulé *Takhṣīṣ ūlī al-albāb fī sharḥ Talkhīṣ a^cmāl al-ḥisāb* [Spécialisation des hommes de cœur dans le commentaire de l'Abrégé des opérations du calcul]. En effet, au début de son livre, l'auteur dit, après avoir évoqué les nombres parfaits, abondants, déficients et amiables :

> Nous mettons en annexe à la fin du livre ce qu'il est possible <de dire> sur cela, si Dieu le très haut le veut, malgré le fait que ces chapitres sont de peu d'utilité dans les sciences, et c'est pour cette raison qu'il [Ibn al-Bannā] ne les a pas traités.

Voir Ms. Rabat, B. G. 328 D, p. 240. Or le texte édité par M. Souissi, commence ainsi :

> Nous avons promis au début du livre de mettre en annexe, à la fin, ce qu'il est possible <de dire> sur ces quatre chapitres que l'auteur [Ibn al-Bannā] a omis et qui sont les chapitres du nombre parfait, de l'abondant, du déficient et des nombres amiables".

L'Arithmétique diophantienne

La troisième orientation de l'arithmétique arabe semble également provenir de deux sources distinctes. L'origine de la première n'est pas clairement identifiée. Il s'agirait, là aussi, d'un fond plus ou moins ancienne rassemblant différents types de problèmes qui aboutissent à des systèmes d'équations. Certains de ces problèmes ont été à l'origine d'un chapitre nouveau consacré à la résolution des systèmes d'équations indéterminées dans l'ensemble des entiers ou des rationnels, comme cela est traité dans le *Livre des choses rares en calcul* d'Abū Kāmil (m. 930)[59] et dans le *Fakhrī* d'al-Karajī[60].

La seconde source est constituée essentiellement des *Arithmétiques* de Diophante ou, du moins, de la partie traduite en arabe. Cette traduction, qui a été réalisée tardivement par Qusṭā Ibn Lūqā (m. 910), a suscité un grand intérêt parmi les mathématiciens du X[e] siècle. Cet intérêt s'est concrétisé dans la publication d'un certain nombre de commentaires sur le contenu de l'ouvrage réalisés, en particulier, par le traducteur lui-même[61], par Abū l-Wafā' (m. 997)[62] et par 'Ibn al-Haytham[63]. Malheureusement, aucun de ces commentaires ne nous est parvenu. A partir de là, différents thèmes ont été étudiés : triangles rectangles numériques, nombres congruents, décompositions en somme de carrés d'entiers, etc. Parmi les chercheurs qui y ont contribué, on peut citer Abū-l-Jūd, al-Khāzin, as-Sijzī et Ibn al-Haytham, tous des mathématiciens du XI[e] siècle[64].

Certains problèmes retrouvés dans des ouvrages maghrébins des XII[e]-XIII[e] siècles laissent à penser que des écrits de cette tradition orientale, non encore identifiés, ont bel et bien circulé vers les foyers scientifiques de l'Occident musulman. Mais, on ne peut rien dire de plus dans l'état actuel de nos connaissances des sources andalouses et maghrébines. Parmi les textes qui nous sont parvenues, le plus intéressant pour la question qui nous occupe ici est le *Livre d'algèbre* d'Ibn al-Bannā (m. 1321). Il contient un ensemble de problèmes diophantiens dispersés dans des chapitres d'algèbre classique. On y trouve, en particulier le problème de la

---

Voir M. Souissi : *Risālat Ibn al-Bannā al-Murrākushī fī l-aʿdād at-tāmma wa z-zā'ida wa n-nāqiṣa wa l-mutaḥābba* [Epître d'Ibn al-Bannā al-Murrākushī sur les nombres parfaits, abondant, déficients et amiables], Tunis, Publications de l'Université de Tunis, 1976, n° 13, p. 195.

59- Abū Kāmil : *Kitāb aṭ-ṭarā'if fī l-ḥisāb* [Le livre des choses rares en calcul], Ms. Paris B.N. n° 4946, ff. 7b-10a.

60- al-Karajī : *al-Fakhrī*; in A. S. Saïdan : *History of Algebra in Medieval Islam, A Comparative Study*, Part I, Algebra in Eastern Islam, Koweit, 1985, vol. I.

61 - Qusṭā Ibn Lūqā : *Tafsīr li thalath maqālāt wa niṣf min kitāb Diyūfanṭus fī l-masā'il al-ʿadadiyya* [Explication de trois livres et demi de l'ouvrage de Diophante sur les problèmes numériques].

62- Abū l-Wafā' : *Tafsīr Kitāb Diyūfanṭis fī l-jabr* [Commentaire au Livre de Diophante sur l'algèbre]; *Kitāb al-barāhīn ʿalā l-qaḍāyā llatī staʿmalahā Diyūfanṭis fī kitābihī wa ʿalā mā staʿmalahū huwa fī t-tafsīr* [Livre sur les démonstrations des propositions qu'a utilisées Diophante dans son livre et qu'il a utilisées lui dans son Commentaire].

63- Selon Ibn Abī Uṣaybiʿa (*Uyūn al-anbā' fī ṭabaqāt al-aṭibbā'* [Les sources de l'information sur les catégories de médecins], N. Riḍā (édit.), Beyrouth, édition non datée, p. 560), il s'agirait d'un commentaire d'Ibn al-Haytham sur le Livre de Diophante qui aurait été rédigé par son élève Isḥāq Ibn Yūnis (m. vers 1080).

64- A. P. Youschkevitch : *Les mathématiques arabes*, op.cit., pp. 66-69.

décomposition d'un entier en somme de deux carrés. L'élément intéressant et intriguant, dans le passage en question, est le fait que l'auteur y évoque les solutions rationnelles du problème en affirmant, comme si le résultat était bien connu, que si la décomposition en carrés d'entiers était impossible, alors il serait impossible de décomposer l'entier en question en somme de deux carrés de rationnels[65]. L'histoire de ce problème particulier, dans la tradition mathématique arabe, n'est pas connue mais nous savons qu'au XVII^{e} siècle, Fermat a tenté vainement de le résoudre et que la première preuve, utilisant uniquement les outils classiques de la théorie des nombres, n'a été fournie qu'en 1912[66]. On trouve aussi dans le livre d'Ibn al-Bannā la résolution, en nombres entiers ou rationnels, d'un ensemble d'équations faisant intervenir des carrés d'entiers. La forme des problèmes et leur résolution les rattachent à un chapitre traité, au X^{e} siècle, par Abū Kāmil dans son livre d'Algèbre[67].

LES FONDEMENTS DE L'ARITHMETIQUE : LES COMMENTAIRES SUR L'UNITE ET LE NOMBRE

Parmi les définitions du Livre VII des Eléments d'Euclide les deux premières qui ont trait, respectivement, aux notions d'*unité* et de *nombre*, sont celles qui ont fait le plus réfléchir, écrire et débattre les mathématiciens et les philosophes de la tradition arabe[68]. D'Ibn Sīnā à Ibn Rushd (m. 1198), les philosophes des pays d'Islam ont consacré de longs développements à la fois à l'*un* "ontologique" et à l'*un* "mathématique"[69]. Ces développements n'ont pas laissé indifférents les mathématiciens qui ont diversement réagi aux propos de leurs collègues philosophes, même si ces derniers étaient unanimes pour dire que le traitement de ces questions n'étaient pas du ressort du mathématicien mais du philosophe seul.

Pour nous limiter au domaine de l'arithmétique, il nous faut d'abord citer les définitions et les éventuels commentaires de quelques auteurs dont les textes ont circulé en Occident musulman. Dans leur encyclopédie, les Ikhwān aṣ-Ṣafā' disaient, à propos de l'unité :

> L'un au sens propre est la chose qui n'a pas de partie du tout et qui ne se divise pas. Et tout ce qui ne se divise pas est un de ce point de vue-là selon lequel il ne se divise pas. Et si tu veux, tu peux dire : l'un est ce qui ne contient pas autre <chose> que lui, en tant qu'il est un. Quant à l'un par convention, c'est tout ensemble qui est dit un, comme lorsqu'on dit une dizaine, une centaine, un millier. Et l'un est un par l'unité comme le noir est noir par la noirceur et l'unité est un attribut de l'un comme la noirceur est un attribut du noir".

---

[65]- Ibn al-Bannā : Kitāb al-uṣūl wa l-muqaddimāt fī l-jabr wa l-muqābala [Livre des fondements et des préliminaires de l'algèbre et de la muqābala], A. Djebbar (édit.) : Mathématiques et Mathématiciens du Maghreb médiéval (IX^{e}-XVI^{e} siècles) : Contribution à l'étude des activités scientifiques de l'Occident musulman, Thèse de Doctorat, Université de Nantes, 1990, Vol. II, pp. 63-64, 86-91.

[66]- A. Weil : Number Theory, an Approach through history from Hammurapi to Legendre, Boston, Biekhäuser, 1983, pp. 292-295.

[67]- Abū Kāmil : *Kitāb al-jabr wa l-muqābala* [Livre de la restauration et de la comparaison], Ms. Istanbul, Kara Mustafa Paşa n° 379, ff. 79a-94b.

[68]- D_1 : Est unité ce selon quoi chacune des choses existantes est dite une"; D_2 : "Et un nombre est la multitude composée d'unités. Voir B. Vitrac : Euclide, les Eléments, op. cit., Vol. 2, pp. 247-251.

[69]- M. Mesbahi : *L'un entre l'accident et l'essence : d'Ibn Sīnā à Ibn Rushd,* Actes du 3^{e} Colloque maghrébin, op. cit., pp. 73-91.

En ce qui concerne le nombre et sa relation avec l'un, ils écrivent ceci :

> Quant à la pluralité, c'est un ensemble d'unités. Et l'un qui est avant deux est le fondement du nombre et son origine, et de lui s'engendrent tous les nombres, les entiers et les fractions, et en lui ils se décomposent"[70].

Dans sa paraphrase abrégée des *Éléments* d'Euclide qu'il a insérée dans son célèbre corpus *ash-Shifā'* (et qui a circulé à la fois en Andalus et au Maghreb), Ibn Sīnā, substitue à la formulation d'Euclide la suivante qui n'en est pas très éloignée :

> L'unité est ce par quoi toute chose est dite une" et il y ajoute le petit commentaire suivant : "et c'est la signification du fait que la chose n'admet pas la division par l'intellect". Quant au nombre, il est pour lui "un ensemble composé d'unités"[71].

La troisième référence orientale, connue des scientifiques d'al-Andalus, est celle du mathématicien du XI^e siècle Ibn al-Haytham dont deux ouvrages importants traitent du contenu de *Eléments* d'Euclide sans en être de simples commentaires. Le premier, *Sharḥ Muṣādarāt Uqlīdis* [Explication des prémisses <des *Eléments*> d'Euclide] est, comme son titre l'indique, consacré à des commentaires et à des développements sur les axiomes, les postulats et les définitions des *Eléments*. Le second est intitulé *Ḥall shukūk Uqlīdis* [Résolution des doutes sur <les *Eléments*> d'Euclide]. Dans ce dernier ouvrage (qui était également connu au Maghreb au XIV^e siècle)[72], Ibn al-Haytham se distingue nettement des philosophes en incluant l'*un* mathématique dans l'ensemble des nombres. Il commence d'abord par signaler que, parmi les mathématiciens, certains avaient douté de la validité des deux définitions d'Euclide et lui avaient reproché de traiter l'unité comme un nombre, dans certaines de ses propositions, alors qu'elle ne l'est pas selon sa propre définition du nombre[73]. Puis il dit :

> Il est possible de définir le nombre à l'aide d'une définition dans laquelle entre l'un et le deux et ce en disant : le nombre c'est l'unité et ce qui résulte de sa répétition", en ajoutant à l'adresse de ceux qui pourraient lui reprocher d'avoir transgressé, dans sa définition, les règles élémentaires de la Logique : "Nous avons déjà évoqué cette notion dans l'Explication des prémisses et nous avons argumenté à propos de sa validité. Et nous avons également expliqué (…) que nous entendons, par "définition", le propos qui exprime l'idée et non ce que désignent ceux qui se disent philosophes"[74].

Il semble que ce soit la position d'Ibn al-Haytham qui ait été adoptée par des mathématiciens d'al-Andalus. Au XI^e siècle, al-Mu'taman (m. 1085), tout en reprenant la définition du nombre en terme de multitude, n'en exclut pas l'unité puisqu'il dit : "*Il y a douze termes pour les nombres, dont neuf pour les unités et trois pour les dizaines, centaines, milliers*"[75]. Plus tard Ibn Mun^{c}im, s'inscrivant dans la démarche de son prédécesseur (auquel il se réfère souvent d'ailleurs) incluait *un* dans les nombres sans éprouver le besoin de le justifier[76].

70- Ikhwāna aṣ-Ṣafā' : *Rasā'il* [Épîtres], op. cit., Vol. I, pp. 49-50.

71- Ibn Sīnā : *Kitāb ash-Shifā', Usul al-handasa* [Le Livre de la guérison, Les fondements de la Géométrie], A. L. Muzhir (édit.), Cairo, 1975, p. 211.

72- Ibn Haydūr : *Tuḥfat aṭ-ṭullāb*, op. cit., f. 71a.

73- En particulier dans la proposition 20 du *Livre VII* et dans la proposition 35 du *Livre IX*.

74- Ibn al-Haytham : *Kitāb ḥall shukūk Uqlīdis* [Livre de la résolution des doutes <sur les *Eléments*> d'Euclide], Ms. Istanbul, B. Université 800, fac simile (F. Sezgin édit.), Frankfurt, 1985, p. 291.

75- Al-Mu'taman : *Kitāb al-istikmāl*, ms. Le Caire, Dār al-kutub, n° 40 m, f. 1b.

76- Ibn Mun^{c}im : *Fiqh al-ḥisāb*, op. cit., p. 216.

Au Maghreb, les débats vont commencer (ou reprendre) semble-t-il avec la publication de l'ouvrage (non encore retrouvé) d'un élève d'Ibn Munᶜim, al-Qāḍī ash-Sharīf (m. 1184) qui aurait critiqué les définitions d'Euclide. Son élève, Ibn al-Bannā réagit alors en ces termes, dans un ouvrage de jeunesse qui ne nous est pas parvenu :

> L'un est un nombre en puissance et non acte et c'est ce qui est acceptable pour moi et c'est ce qu'a adopté Euclide (...). Et avec cela est écartée l'objection opposée à Euclide par notre maître, le professeur Abū ᶜAbdallāh ash-Sharīf"[77]. Dans un livre probablement postérieur, il revient à la charge en affirmant que "l'un numérique n'est pas un nombre par son essence parce qu'il est la cause du nombre et le nombre est causé par lui. Et la cause n'est pas <issue> du causé. L'un n'est donc pas un nombre"[78]. Dans son manuel le plus célèbre, le Talkhīṣ [L'abrégé] (qui va dominer l'enseignement des mathématiques au Maghreb jusqu'au XVIe siècle au moins), il s'abstient de définir l'unité et se contente de le faire pour le nombre en reprenant la formulation du philosophe Ibn Sīnā[79].

Son silence à propos de l'unité et son affirmation, dans le même manuel, que "*le nombre s'accroît jusqu'à l'infini*", vont lui valoir un certain nombre de critiques de la part de mathématiciens de son époque. Leurs successeurs se sont d'ailleurs fait un plaisir de les répertorier et de les commenter. C'est probablement le nombre et la sévérité de ces critiques qui ont poussé Ibn al-Bannā à rédiger un important ouvrage, le *Rafᶜ al-ḥijāb* [Le lever du voile], dans lequel il réexamine la question de l'unité et du nombre mais, cette fois, avec des arguments empruntés à la philosophie. Il n'hésite pas, en effet, à citer des paragraphes entiers tirés du *Kiṭāb ash-Shifā'* d'Ibn Sīnā, sans jamais nommer son auteur[80]. C'est également l'occasion pour lui d'adopter une position intermédiaire à propos du statut de l'unité en distinguant deux situations, l'une où elle peut être considérée comme un nombre et l'autre où elle ne l'est pas[81].

Après Ibn al-Bannā, le débat va se poursuivre et nous en avons quelques échos dans certains commentaires du *Talkhīṣ*. Al-Ghurbī (ca. 1349) signale une définition d'un mathématicien (qu'il ne nomme pas) et selon laquelle "*le nombre est une quantité qui se multiplie*" mais il lui préfère celle-ci : "*le nombre est une quantité discrète ordonnée*" et il ne

---

77- Ibn Qunfudh : *Ḥaṭṭ an-niqāb ᶜan wujūh aᶜmāl al-ḥisāb* [L'abaissement de la voilette sur les opérations du calcul], Ms. Rabat B.G. 1678D, p. 88.

78- Ibn al-Bannā : *al-Arbaᶜ maqālāt* [Les quatre épîtres], Ms. Rabat B.G 94H, p. 528.

79- M. Souissi : *Ibn al-Bannā' al-Murrākushī, Talkhīṣ aᶜmāl al-ḥisāb* [Ibn al-Bannā de Marrakech, L'abrégé des opérations du calcul], Tunis, Publications de l'Université de Tunis, 1969, pp. 41-42.

80- M. Aballagh : *Les fondements des Mathématiques à travers le Rafᶜ al-ḥijāb d'Ibn al-Bannā (1256-1321).* Actes du 1e Colloque Maghrébin sur l'Histoire des Mathématiques Arabes (Alger, 1-3 Décembre 1986), Alger, Maison du livre, 1988, pp. 133-156.

> 81- Le un, s'il est considéré en tant qu'il est composé d'unités -comme lorsqu'on dit de quinze qu'il résulte du produit de cinq par trois-, <alors> chaque unité de trois est cinq et chaque unité de cinq est trois. Et, comme chaque nombre est un nombre unique, le un est donc composé d'unités et, de ce point de vue, c'est un nombre. Avec cela, l'ordre des unités est constitué de neuf nombres et non de huit, et les noms simples des nombres sont au nombre de douze et non de onze. Et s'il est considéré du point de vue de son unicité et de sa singularité, sans qu'il y ait, là, considération d'une autre nature, il est alors l'unité même qui est le principe du nombre, c'est à dire celle qui est telle que, si on lui ajoute une autre <unité>, leur somme devient un nombre et, dans ce cas, l'un n'est pas un nombre. Ainsi, tout nombre est un mais un n'est pas un nombre.

Voir M. Aballagh : *Rafᶜal-ḥijāb d'Ibn al-Bannā*, op. cit., p. 479.

dit rien sur la définition du *Talkhīṣ* qui est pourtant l'objet de son livre[82]. Al-Muwwāḥidī (ca. 1354) critique la définition du nombre d'Ibn al-Bannā pour deux raisons, d'abord parce que, selon lui, elle n'est qu'une *description* du concept (et non une véritable *définition* au sens aristotélicien), ensuite parce qu'elle exclut les fractions[83].

De son côté, Ibn Qunfudh (m. 1406) se contente de rapporter d'autres définitions pour montrer qu'il n'y a toujours pas, à son époque, unanimité sur celles données par Ibn al-Bannā[84]. Mais l'intervention la plus vigoureuse sur ce thème vient d'Ibn Haydūr (m. 1413) qui, à propos de la définition de l'unité, reprend à son compte celle des lointains Ikhwān aṣ-Ṣafā du Xe siècle. Il exhibe également des arguments philosophiques, révélant d'ailleurs au passage, et contrairement à ce que l'on avait admis depuis longtemps, que l'œuvre d'Ibn Rushd (Averroès) (m. 1198) a eu des lecteurs au Maghreb. En effet, c'est avec des arguments puisés dans les *Jawāmi ͨ mā ba ͨd aṭ-ṭabī ͨa* [Recueils sur la Métaphysique] du philosophe de Cordoue qu'il critique ceux d'Ibn Sīnā relatifs à l'unité[85].

* * *

---

[82]- Al-Ghurbī : *Takhṣīṣ ūla l-albāb fī sharḥ Talkhīṣ a ͨmāl al-ḥisāb* [Commentaire pour l'élite de *l'Abrégé* des opérations du calcul], Ms. Rabat B. G. n° 328 D, pp. 241-240.

[83]- Al-Muwāḥidī : *Taḥṣīl al-munā fī sharḥ Talkhīṣ Ibn al-Bannā* [L'exaucement du souhait dans l'explication de *l'Abrégé* d'Ibn al-Bannā], Ms. Rabat B. G. n° 1081 G, f. 12b.

[84]- Y. Guergour : *al-A ͨmāl ar-riyyāḍiyya li Ibn Qunfudh al-Qasanṭīnī (m. 810/1407)* [Les écrits mathématiques d'Ibn Qunfudh al-Qasanṭīnī (m. 810/1407)], Magister d'Histoire des Mathématiques, Alger, Ecole Normale Supérieure, 1990.

[85] - M. Aballagh : *al-Fikr ar-riyyāḍī li Ibn Haydūr at-Tādilī* [La pensée mathématique d'Ibn Haydūr at-Tādilī], Actes du 3e Colloque Maghrébin, op. cit., partie arabe, p. 13. Sur l'ensemble de la question, voir A. Atmani : *Falsafat ar-riyyāḍiyyāt ͨinda Ibn al-Bannā al-Murrākushī wa shurrāḥuhū al-maghāriba* [La philosophie des mathématiques chez Ibn al-Bannā de Marrakech et chez ses commentateurs maghrébins], Mémoire de D. E. S. en philosophie, Rabat, Faculté des lettres et des sciences humaines, 1999.

BIBLIOGRAPHIE GENERALE SUR LA PHASE ARABE DE L'ARITHMETIQUE

Aballagh, M. : *Les fondements des Mathématiques à travers le Raf^c al-ḥijāb d'Ibn al-Bannā (1256-1321)*. Actes du 1^e Colloque Maghrébin sur l'Histoire des Mathématiques Arabes (Alger, 1-3 Décembre 1986), Alger, Maison du livre, 1988, pp. 133-156.

--------------- : *Raf^c al-ḥijāb d'Ibn al-Bannā* [Le lever du voile d'Ibn al-Bannā], Thèse Doctorat, Université de Paris I-Pantheon-Sorbonne. Édition critique, traduction française et analyse mathématique, 1988.

--------------- : *al-Fikr ar-riyyāḍī li Ibn Haydūr at-Tādilī* [La pensée mathématique d'Ibn Haydūr at-Tādilī], Actes du 3^e Colloque Maghrébin sur l'Histoire des Mathématiques Arabes (Tipaza, 1-3 Décembre 1990), Alger, Office des Publications Universitaires, 1998, partie arabe, pp. 5-22.

Amīn, ^cU. : *al-Fārābī, Iḥṣā' al-^culūm* [al-Fārābī, Classification des Sciences], Le Caire, Librairie anglo-égyptienne, 3^e édition, 1968.

Anbouba, A. : Un traité d'Abū Ja^cfar [al-Khāzin] sur les triangles rectangles numériques, *Journal for the History of Arabic Science*, 1979, Vol. 3, n° 1, pp. 134-178.

Atmani, A. : *Falsafat ar-riyyāḍiyyāt ^cinda Ibn al-Bannā al-Murrākushī wa shurrāḥihī al-maghāriba* [La philosophie des mathématiques chez Ibn al-Bannā et ses commentateurs maghrébins], Diplôme d'Etudes Supérieures en Philosophie, Rabat, Université Mohamed V, Faculté des Lettres et des Sciences Humaines, 1999.

Bouzari, A. : *Procédures et circulation des nombres pensés entre l'Orient et l'Occident musulmans*, Actes du Colloque International « *De la Chine à l'Occitanie, chemins entre arithmétique et algèbre* » (Toulouse, 22-24 septembre 2000). A paraître.

Bertier, J. : *Nicomaque de Gérase, Introduction Arithmétique*, Paris, Vrin, 1978.

Brentjes, S. : *Die Arithmetik bei Ibn Ḫaldūn und sein Zeit*, Hrsg. D. Strum, Halle, Martin-Luther Univ., Wissenschaftliche Beigträge, 1983, 4 ; I, 19, pp. 25-39.

-------------- : Die Erste *Risāla* der Rasā'il Ikhwān aṣ-Ṣafā' über elementar Zahlentheorie - ihr mathematischer gehalt und ihre beziehungen zu spätantiken arithmetischen Schriften. *Janus*, LXXI, 1-4, 1984, pp. 181-274.

-------------- : The Chapter « ^cIlm al-Aritmāṭīqī » on Number Theory in the Persian Encyclopedia « *Ḥadā'iq al-Anwār fī Ḥaqā'iq al-Asrār* » of Fakhr ad-Dīn ar-Rāzī, *Journal of Central Asia*, vol. IX, n° 2, 1986, pp. 59-64.

-------------- : *La transmission arabe de l'Introductio Arithmética dans des travaux non mathématiques au cours du IX^e siècle*, Actes du 3^e Colloque Maghrébin sur l'Histoire des Mathématiques Arabes (Tipaza 1-3 décembre 1990), Alger, 1998, partie I, pp. 23-29.

Būnī (al-) : *Shams al-ma^cārif al-kubrā* [Le soleil des grandes connaissances], Le Caire, al-Maṭba^ca al-miṣriyya, 1874.

Carra de Vaux : Une solution arabe du problème des carrés magiques, *Revue d'Histoire des Sciences*, n° 1 (1948), pp. 206-212.

Diophante : *Les Arithmétiques*, R. Rashed (édit.), Paris, les Belles Lettres, 1984.

Djebbar, A. : *Enseignement et recherche mathématiques dans le Maghreb des XIII^e^-XIV^e^siècles*, Paris, Université de Paris-Sud, Publications Mathématiques d'Orsay, 1980, n° 81-02.

---------------- : *Deux mathématiciens peu connus de l'Espagne du XI^e^ siècle : al-Mu'taman et Ibn Sayyid*, Paris, Université de Paris-Sud, Pré-publications Mathématiques d'Orsay, 1984. Publié dans M. Folkerts & J. P. Hogendijk (édit.) : *Vestigia Mathematica, Studies in medieval and early modern mathematics in honour of H.L.L. Busard*, Amsterdam-Atlanta, GA., 1993, pp. 79-91.

---------------- : *L'analyse combinatoire au Maghreb : l'exemple d'Ibn Mun^c^im (XII^e^-XIII^e^ siècles)*, Paris, Université de Paris-Sud. Publications Mathématiques d'Orsay, 1985, n° 85-01.

---------------- : *Les nombres figurés dans la tradition mathématique de l'Andalousie et du Maghreb*, Paris, Université de Paris-Sud, Prépublications Mathématiques d'Orsay, 1985, n° 85 T 44.

---------------- : *Le Kitāb al-uṣūl wa l-muqaddimāt fi l-jabr wa l-muqābala d'Ibn al-Bannā (1256-1321)* [Le livre des fondements et des prémisses de l'algèbre et de la muqābala] ; in A. Djebbar : *Mathématiques et Mathématiciens du Maghreb médiéval (IX^e^-XVI^e^ siècles) : Contribution à l'étude des activités scientifiques de l'Occident musulman*, Thèse de Doctorat, Université de Nantes-Université de Paris-Sud, 1990.

---------------- : *La tradition arithmétique euclidienne et ses prolongements dans le Kitāb al-Istikmāl d'al-Mu'taman*, Actes du 5^e^ Colloque Maghrébin sur l'Histoire des Mathématiques Arabes (Tunis, 1-3 Décembre 1994), Tunis, I.S.F.C.-A.T.S.M., 1998, pp. 62-84.

---------------- : *Matériaux pour l'étude des démarches inductives et combinatoires dans la tradition mathématique arabe (IX^e^-XV^e^ s.)*, Atelier de la Commission Inter-IREM, Paris, Mars 1997.

---------------- : *Matériaux pour l'étude des problèmes récréatifs dans la tradition mathématique arabe (IX^e^-XV^e^ siècles)*, Université d'Été de Nantes, 12-17 Juillet 1997.

---------------- : Les livres arithmétiques des Eléments d'Euclide dans une rédaction du XI^e^ siècle : le Kitāb al-istikmāl d'al-Mu'taman (m. 1085), *Lull*, Saragosse, Vol. 22, n° 45 (1999), pp. 589-653.

---------------- : Figurate Numbers in the Mathematical Tradition of Andalus and the Maghrib, *Suhayl*, Barcelone, n° 1 (2000), pp. 57-70.

Goldstein, B. : A Treatise on Number Theory from a Tenth Century Arabic Source. *Centaurus* 10 (1964), pp. 129-160.

Guergour, Y. : *Les différents systèmes de numérotation au Maghreb à l'époque ottomane : l'exemple des chiffres rūmī*, Actes du XX^e^ Congrès International d'Histoire des Sciences (Liège, 20-26 Juillet 1997), vol. VI (Actes du Symposium sur *Science, Technologie and Industry in the Ottoman world*), E. Ihsanoglu, A. Djebbar & F. Günergun (édit.), Turnhout, Brepols, 2000, pp. 67-74.

Heath, T. L. : *Euclid, the thirteen books of the Elements*, New York, Dover Publications, Second Edition, vol. I (Books I-II).

Hogendijk, J. P. : Thābit ibn Qurra and the Pair of Amicable Numbers 17296, 18416, *Historia Mathematica* 12 (1985), pp. 269-273.

------------------- : Discovery of an 11th century geometrical compilation, the Istikmāl of Yūsuf al-Mu'taman Ibn Hūd, king of Saragossa, *Historia Mathematica* **13**, 1986, pp. 43-52.

Ibn Khaldūn : *Kitāb al-ʿibar, al-Muqaddima* [Le livre des sentences, Les Prolégomènes], Beyrouth, Dār al-kitāb al-lubnānī-Maktabat al-madrasa, vol. I, 1983.

Ibn Qurra : *Kitāb al-mudkhal ilā ʿilm al-ʿadad* [Le livre de l'Introduction à la science du nombre], W. Kutsch (édit. et trad.), Beyrouth, 1958.

Ibn Sīnā : *Kitāb ash-Shifā', al-Arithmāṭīqī* [Le Livre de la guérison, l'Arithmétique], A. L. Muzhir (édit.), Le Caire, 1975.

Ikhwān aṣ-Ṣafā' : *Rasā'il* [Epîtres], Beyrouth, Dār Ṣādir (non datée).

Karajī (al-) : *al-Fakhrī*, A. S. Saïdan (édit), in *History of Algebra in Medieval Islam, A Comparative Study, Part I, Algebra in Eastern Islam*, Koweit, 1985, vol. I, pp. 223-224.

Khwārizmī (al-) : *Kitāb mafātīḥ al-'ulūm* [Livre des clés des sciences], G. van Vloten (édit.), 1895 ; réimpression E.J. Brill, Leiden, 1968.

Mesbahi, M. : *L'un entre l'accident et l'essence : d'Ibn Sīnā à Ibn Rushd*, Actes du 3e Colloque maghrébin d'histoire des mathématiques (Tipaza, 1-3 decembre 1990, Alger, Office des Publications Universitaires, 1998, partie arabe, pp. 73-91.

Pines, S. : *Thabit Ibn Qurra's conception of number and theory of mathematical infinite*, Actes du XIe Congrès International d'Histoire des Sciences, Varsovie 1965, III, pp. 160-66.

Rashed, R. : Nuṣūṣ li tārīkh al-aʿdād al-mutaḥābba wa ḥisāb at-tawāfuqāt [Textes sur l'histoire des nombres amiables et du calcul des combinaisons], *Journal for the History of Arabic Science*, vol. 6, n° 1-2, 1982, pp. 209-278.

------------ : *Entre Arithmétique et Algèbre, recherches sur l'histoire des mathématiques arabes*, Paris, Les Belles lettres, 1984.

Saïdan, A. S. : *Number theory and series summations in two arabic texts*, Proceedings of the first international symposium for the history of arabic science (Alep, 5-12 Avril 1976), Alep, Institut for the History of Arabic Science, 1978, vol. II.

--------------- : *Kitāb al-aʿdād al-mutaḥābba li Thābit Ibn Qurra*. [Livre des nombres amiables de Thābit Ibn Qurra], Amman, 1977.

--------------- : *Marāsim al-intisāb fī maʿālim al-ḥisāb li Yaʿīsh ibn Ibrāhīm al-Umawī* [Le cérémonial de l'adhésion à propos des signes du calcul], Alep, Institut for the History of Arabic Science, 1981.

--------------- : Al-Baghdādī, *at-Takmila fī l-ḥisāb* [La complétion en calcul], Koweit, 1985.

Sesiano, J. : Le traitement des équations indéterminées dans le Badiʿ fī l-ḥisab d'Abū Bakr al-Karajī, *Archive for History of Exact Sciences*, vol. 17, n°4, 1977, pp. 297-379.

-------------- : Les méthodes d'analyse indéterminée chez Abū Kāmil, *Centaurus* 1977, vol. 21, n°2, pp. 89-105.

-------------- : *The Arabic Text of Books IV to VII of Dophantus' Arithmetica in the translation of Qusta ibn Luqa*, New York, Springer Verlag, 1981.

-------------- : An Arabic treatise on the construction of bordered magic squares, *Historia scientiarum 42 (1991)*, pp. 13 - 31.

-------------- : Quelques méthodes arabes de construction des carrés magiques impairs, *Bull. Soc. Vaudoise des Sciences Nat.*, 83 (1994), pp. 51-76.

-------------- : Herstellungsverfahren magischer Quadrate aus islamischer Zeit (II), *Sudhoffs Archiv* 71 (1987), pp. 78 – 87; (III), op. cit., 79 (1995), pp. 193 - 226.

---------------- : *Un traité médiéval sur les carrés magiques*, Lausanne, Presses Polytechniques et Universitaires Romandes, 1996.

Souissi, M. : *Ibn al-Bannā' al-Murrākushī, Talkhīṣ aᶜmāl al-ḥisāb* [Ibn al-Bannā de Marrakech, L'Abrégé des opérations du calcul], Tunis, Publications de l'Université de Tunis, 1969.

--------------- : Sharḥ ṣafḥa min Muqaddimat Ibn Khalḍūn fī l-ᶜulūm al-ᶜadadiyya [Explication d'une page de la *Muqaddima* d'Ibn Khaldūn sur les sciences numériques], *Bulletin de l'Université de Tunis*, n° 10, 1973, pp. 87-93.

--------------- : *Un texte d'Ibn al-Bannā' sur les nombres parfaits, abondants, déficients et amiables*, International Congress of Mathematical Sciences, Karachi, 14-20 Juillet 1975 ; *Bulletin de l'Université de Tunis*, **13**, 1976, pp. 193-209 (version arabe).

--------------- : Ḥisāb al-wafq [La construction des carrés magiques], *Bulletin de l'Université de Tunis*, n° 16, 1978, pp. 27-43.

Vitrac, B. : *Euclide d'Alexandrie, les Eléments (traduits du texte de Heiberg)*, Paris, Presses Universitaires de France, vol. II, 1994.

Woepcke, F. : *Notice sur une théorie ajoutée par Thâbit ben Korrah à l'arithmétique spéculative des Grecs*, Journal Asiatique 4, série 20 (1852), pp. 420-429 ; fac-simile in F. Woepcke : *Etudes sur les Mathématiques arabo-islamiques*, F. Sezgin (édit.), Frankfurt, Institut für Gechichte der Arabisch-Islamischen Wissenschaften, 1986.

--------------- : Passages relatifs à des sommations de séries de cubes, extraits de trois manuscrits arabes inédits de la bibliothèque impériale, *Annali di scienze matematiche e fisiche, compilati de Barnaba Tortolini*, vol. 5 (1863), pp. 147-181.

* * *