

GENESE PSYCHOLOGIQUE DU SYSTEME DES NOMBRES ET FORMALISATION DE L'ARITHMETIQUE

Fernand DORIDOT

Cet article concerne certains aspects du travail de thèse de l'auteur en philosophie des mathématiques, consacré à l'étude des relations entre constitution cognitive des objets « nombres entiers naturels » et formalisation de l'arithmétique. Il présente la théorie piagétienne de la genèse psychologique du système des nombres, marquée par le rôle crucial de « l'abstraction réfléchissante ». Les nombres « psychologiques » y apparaissent comme corrélats idéaux d'une structure d'opérations réversibles, baptisée groupement, en laquelle s'organisent peu à peu, aux alentours de huit ans, les actions de l'enfant sur les collections empiriques. On s'interroge succinctement, dans cet article, sur les liens entre ce système psychologique des nombres et le système arithmétique formalisé.

Ces quelques pages ont pour ambition de présenter, dans leurs grandes lignes, certains aspects du travail de thèse en philosophie des mathématiques que je mène, à l'Université de Nantes, sous la direction de Patrice Bailhache. Je commencerai, pour en exposer la teneur, par citer une parole déjà ancienne de Jean Piaget¹ : « les formes d'existence conférées à un objet mathématique (qu'il s'agisse de la non-contradiction, de l'appartenance à une classe, d'une décision, d'une construction au sens de Brouwer ou d'une intuition *a priori* au sens de Kant ou de Poincaré) sont, comme l'a remarqué P. Bernays, toujours relatives à l'existence d'un cadre et conditionnées par lui. Mais la résolution du problème de l'existence même de ce cadre, c'est-à-dire l'isolement de cette *sphère de réalité* dont on fera le support des démonstrations valides, ne peut se passer des résultats de la psychologie ; car on n'atteint ce cadre que par l'intermédiaire de processus mentaux caractérisés, en particulier la perception et le langage ». L'idée ici exprimée, et que toute l'œuvre de Piaget viendra défendre, est ainsi que certaines composantes cognitives déterminent l'activité mathématique, et que la compréhension de celle-ci nécessite la connaissance de celles-là. Idée bien sûr en un sens très banale, les mathématiques étant, à l'instar de toute activité humaine - et quoi que puissent en dire le mathématicien créateur, quand il a fini sa journée, ou le philosophe platonicien naïf, quand il la commence - réalisées et comprises *hic et nunc* par des êtres soumis non seulement aux contraintes usuelles de la cognition cérébrale, mais aussi aux caractères déterminants de la réalité physique. Mais idée également susceptible d'orienter le travail de l'épistémologue dans une direction originale : peut-être est-il nécessaire, pour saisir en son essence la dynamique du phénomène mathématique, de s'attacher entre autres aux modalités cognitives de sa constitution. Non tant de se restreindre, comme une certaine neuropsychologie cognitive le propose aujourd'hui, à l'étude des représentations

¹ Cf. Beth & Piaget (1961), p. 159. (voir bibliographie en fin de texte).

mathématiques individuelles - que ce soit celles des nombres ou des figures géométriques - que de chercher à déterminer, en une démarche au fond kantienne, les *conditions de possibilité* des procédures réglées d'exhibition et de démonstration caractéristiques de la mathématique ; et ce avec l'espoir, ou la crainte, de retrouver, dans le déroulement des théorèmes caractérisant telle notion, dans le choix de tel ou tel concept fondateur pour telle branche théorique, dans tel mode d'exhibition retenu au détriment de tel autre, quelque chose comme un écho de la constitution *cognitive* de l'objet et des actes *mentaux* qui en sont l'origine. Philosophiquement, l'enjeu d'une telle approche est donc le statut de la formalisation et du langage mathématique ; il s'agit, par une description minutieuse de la constitution psychologique des concepts mathématiques - au sens où Husserl la propose pour le concept de nombre dans sa *Philosophie de l'Arithmétique* - et de la façon dont, plus tard, la théorie formalisée retrouve et prend en charge, par les moyens qui lui sont propres, ces déterminations, d'assigner au procès mathématique une place bien circonscrite. On retrouve bien sûr au terme de ce parcours les grandes oppositions entre réalisme et nominalisme, entre innéisme et empirisme, mais elles demandent à être abordées avec une conviction affirmée : celle que les mathématiques s'élaborent avant tout en *réponse*, et non vraiment en *solution*, à certaines sollicitations concrètes du monde phénoménal. Il n'y a pas d'objet mathématique *naturel* au sens strict, donné ou non dans une sorte d'intuition empirique ou *a priori*, mais il y a des objets *construits* pour permettre la maîtrise et la mise en rapport de classes maximales de phénomènes. A cet égard, et pour prendre un exemple grossier, le nombre π ne doit pas tant être vu comme le rapport constant entre périmètre et diamètre du cercle que comme une construction théorique apportant réponse à ce fait objectif de la similitude observée entre les mesures de ces différentes caractéristiques des cercles idéaux. Comme tout objet de science, l'objet mathématique est donc essentiellement *construit*, et l'expérience qui nous permet d'en dégager les propriétés porte de toutes parts la marque théorique.

Mais l'exemple du nombre π nous met en rapport avec la difficulté inhérente à toute approche génétique de ce type : rien n'assure, même une fois reconnu le caractère constitué de l'objet mathématique, et une fois exprimée l'ambition d'en déterminer l'origine, que cette quête puisse avoir comme aboutissement l'isolement d'une classe de phénomènes physiques à l'occasion desquels se manifesteraient certaines *pratiques* ou *actions*, elles-mêmes concrètes ou spécifiquement mentales, et dont la construction théorique apporterait comme une forme contingente de synthèse, ou simplement d'exposition. Peut-être en effet l'expérience mathématique est-elle toujours expérience sur des êtres mathématiques *déjà constitués* - dans le cas de π , l'idéalité du cercle en est un prérequis - et, dès lors, l'espoir de remonter aux déterminations cognitives originelles un doux rêve de philosophe. Ainsi par exemple l'idéalisation originelle, qu'on retrouve au fondement de toutes les branches mathématiques, ne laisse pas de poser problème au psychologue comme à l'empiriste, bien en mal, et ce depuis longtemps, d'expliquer l'émergence du concept générique de la droite idéale, sans épaisseur et infinie, à partir des données restreintes de nos perceptions sensibles et des larges segments vaguement courbés de la réalité concrète. On dira bien sûr qu'il ne s'agit là que d'une construction, commode pour décrire les phénomènes ; que l'infinité elle-même, dans la forme « actuelle » que lui confère l'idéologie ensembliste issue de Cantor et Dedekind, est un choix contingent. On pourra même tenter d'apporter à ce processus, qu'on l'appelle idéalisation ou abstraction, des explications naturalistes, souvent convaincantes². Mais le défaut récurrent de toutes ces tentatives est sans doute de surestimer la naturalité du phénomène choisi comme corrélat de l'activité d'abstraction : le segment épais et courbe est

² Par exemple par des arguments statistiques : l'idéalisation des figures géométriques est parfois décrite comme une des formes les plus primitives de la perception sensorielle (la grenouille, par exemple, ne verrait que des cercles parfaits partout où nous voyons des ronds approximatifs), retenue par l'évolution pour sa capacité statistique à subsumer la plus large classe de situations. Cf. par exemple l'exposé de N. Bischof dans [Piatelli-Palmarini, 1979, pp. 343-355].

déjà une construction, issue elle-même d'abstractions antérieures, tout comme la notion de la permanence des objets physiques relève déjà d'un flux de pratiques et d'observations, bien avant que ne soit envisageable l'abstraction des qualités différentielles de ces objets pour en faire les éléments d'une classe numérique. C'est d'ailleurs un des nombreux paradoxes du parcours de Piaget que d'avoir poursuivi la quête de la « sphère de réalité », soi-disant support des démonstrations valides, tout en reconnaissant, dans le développement de l'enfant comme dans celui de la science, une suite ininterrompue de transformations dont le premier terme reste introuvable.

Que de telles difficultés ne justifient pas l'abandon d'une approche génétique, et en quoi une telle approche peut apporter, sinon des réponses définitives, tout du moins certains éléments pour la réflexion sur les mathématiques, voilà ce que ces quelques pages vont tenter d'expliquer. Avec pour première thèse, banale au mathématicien mais moins évidente au philosophe, que les mathématiques ne sont pas *seulement* une science de l'idéalité. C'est-à-dire que leur développement n'est pas tant motivé par l'étude exhaustive des propriétés de tel objet idéal, par exemple de la droite infinie et sans épaisseur, que par la poursuite du discours qu'entretient *pour lui seul* un champ *entier* d'idéalités, corrélées dès leur naissance comme le sont les entiers naturels dans l'axiomatique de Peano ; discours qui possède ses règles propres et ses propres procédures d'extension, aux conditions cognitives de possibilité desquelles il est loisible de s'attacher, même si doit demeurer illusoire l'idée du seuil idéal frontière des phénomènes et de la science. Tout cela pour rappeler, entre autres, qu'il n'existe pas d'épistémologie des mathématiques qui fasse l'économie de la connaissance et de la pratique des textes mathématiques eux-mêmes, fût-elle menée dans un laboratoire de neuropsychologie.

Je me propose, à l'occasion de mon travail de thèse, de tenter une réalisation partielle, limitée au cas de l'arithmétique, du programme dont l'ambition des lignes qui précèdent est de justifier la pertinence. C'est-à-dire, plus précisément, de confronter les résultats fournis par la psychologie quant aux modalités du développement de l'idée de nombre et aux caractères généraux de la cognition mathématique, aux constructions théoriques du système des nombres entiers, notamment à celles proposées, à la fin du siècle dernier et au tournant du nôtre, par Frege, Dedekind, Peano et Hilbert. Je me limiterai ici, en revanche, à l'exposé de certains apports de la psychologie, et à la présentation succincte de certaines des perspectives qu'ils semblent pouvoir offrir quant à leur mise en rapport avec les textes mathématiques fondationnels. Un des problèmes principaux rencontrés à cet égard est de tirer du foisonnement des résultats en tous genres de la psychologie contemporaine, notamment de celle d'inspiration cognitive, des données objectives et utilisables. J'ai fait le choix de me restreindre ici à ceux, déjà anciens, fournis par l'école de Piaget. On sait bien sûr que Piaget est aujourd'hui vivement critiqué. Les psychologues lui reprochent, entre autres, d'avoir sous-estimé les capacités cognitives des très jeunes enfants et d'avoir proposé une théorie des stades de développement beaucoup trop rigide, à l'appui d'expériences dont on conteste la crucialité³ ; les philosophes et les historiens rejettent, quant à eux, et à mon sens avec raison, son ambition épistémologique, à la fois énorme et simpliste, de faire du développement historique de la science un mouvement isomorphe à celui du développement cognitif de l'enfant. Enfin on lui reproche, de façon posthume, le zèle mêlé d'amertume avec lequel ses disciples s'obstinent, en leur bastion genevois, à tenter de résister aux assauts de la polycéphale « nébuleuse cognitive » dans la lutte universitaire pour l'influence intellectuelle et l'occupation des chaires d'enseignement en psychologie. Il n'empêche que, pour qui entend aborder la psychologie des mathématiques avec des motivations philosophiques — et en particulier avec la volonté de confronter, dans la mesure restreinte où un tel projet demeure raisonnable, les thèses philosophiques sur l'intuition, le raisonnement, ou l'évidence mathématiques, aux faits expérimentaux —,

³ Cf. par exemple, sur ces points, [Houdé-Miéville, 1993, pp. 123-146], et [Dehaene, 1997, pp. 47-96].

Piaget, dont ce fut l'ambition première, demeure, à mon sens, un auteur incontournable. Et même si son « épistémologie génétique » présente souvent, à nos yeux désabusés, des thèses simplistes, trop générales, et des arguments qui par leur extension même se condamnent à l'imprécision - voire, comme le cas en est avéré, à l'erreur pure et simple—son effort pour aborder de front les réalités de la pratique mathématique effective avec des outils interprétatifs nouveaux me semble demeurer un cas unique et remarquable ; toujours est-il souvent absent, de façon décevante, des recherches actuelles en psychologie cognitive et en intelligence artificielle.

Je me propose donc ici, en un premier temps, de fournir une synthèse des théories développementales de Piaget relatives à l'acquisition et à l'évolution, chez l'enfant, des principaux caractères de la structure des nombres entiers naturels. Une telle tâche est en elle-même assez problématique, tant l'œuvre de Piaget, comme toute tentative scientifique, est riche en autocritiques et en remaniements tardifs. Sans avoir, bien sûr, l'ambition d'une étude exhaustive, ni même d'une présentation succincte du dernier état de la construction, j'espère avoir réussi à fournir, de façon nécessairement très résumée compte tenu des conditions de cet article, un panorama qui puisse à la fois informer le philosophe et contenter le psychologue. Remarquons à cet égard qu'aucune des critiques théoriques, apportées en droit de nos jours à ce monument de la psychologie scientifique par de nombreux auteurs formés tout d'abord à son idéologie, ne vient véritablement contrarier, à mon sens, l'usage que j'entends faire de ces données. Peu importe en effet l'exactitude du modèle dans ses détails ; nous tâcherons de nous attacher surtout à sa structure générale, dont la plupart des psychologues contemporains reconnaissent la validité, et d'en dégager des conséquences philosophiques globales.

Il s'agit donc ici de nous attacher, par l'étude du développement de la notion de nombre chez l'enfant tel que Piaget a tenté de le reconstruire, à un stade où l'arithmétique n'est pas encore un domaine théorique bien circonscrit, mais où l'idée de la suite ordonnée et infinie des nombres émerge peu à peu, dans l'esprit de l'enfant et en réponse à certaines sollicitations concrètes, comme la structure de référence *la plus à même* de subsumer une classe maximale de phénomènes relatifs à ce qui deviendra pour nous la quantité discrète. Il faut donc saisir qu'à ce stade non seulement les résultats de l'arithmétique, c'est-à-dire l'ensemble des rapports liant les nombres, mais également la simple idée de la *possibilité* d'une considération de la structure de progression, dont les nombres formeront un modèle, présente tous les aspects d'une construction *physique*. Elle ne diffère d'une véritable *théorie physique* que dans la mesure où elle s'élabore à un niveau purement cognitif, c'est-à-dire sur un plan strictement représentationnel. Mais que ces termes psychologiques ne cachent pas l'importance du processus en cours : ce n'est pas aux simples « entiers intuitifs » que parvient l'enfant au terme de cette construction, dans le sens où l'on emploie souvent ces termes pour qualifier les exemplifications les plus primitives du concept de quantité⁴. Ce qui se dégage et ce que comprend l'enfant, c'est bien *en quoi*, par exemple, les collections concrètes finies sont susceptibles de *faire système*, d'être ordonnées les unes par rapport aux autres, de correspondre chacune à un barreau et un seul d'une *échelle de mesure* qui se construit peu à peu. L'idée de nombre n'est pas, comme la soi-disant philosophie « cognitive »⁵ des mathématiques le laisse trop souvent entendre, dans la reconnaissance

⁴ Rappelons que chez Kant, le nombre est le schème transcendantal de la quantité, c'est-à-dire, en très gros, la construction, par l'intuition pure, dans l'espace et le temps, d'une exemplification de la catégorie abstraite, générale et *a priori*, de la quantité. On comprend bien sûr qu'une analyse précise des liens entre les thèses de Kant et de Piaget serait profitable à cette étude. En particulier il serait tentant de pouvoir parler d'*intuition pure* au sujet de la construction purement mentale, représentationnelle, du système des nombres au stade des opérations concrètes, comme elle se présente chez Piaget.

⁵ Elle est menée par des gens très divers, animés par des options très différentes : notamment une forme de platonisme chez P. Maddy [Maddy, 1990], d'anti-platonisme chez P. Kitcher ou J.P. Changeux [Kitcher, 1983] et [Changeux, 1989],

qu'il existe une différence entre deux ensembles de respectivement trois et quatre pommes ; de telles reconnaissances sont quasiment innées, chez l'homme comme chez l'animal, et les cognitifs en tirent ni plus ni moins que l'innéité des mathématiques chez l'homme ! Mais le nombre naît à l'instant où s'impose une *organisation fixe* des collections finies concrètes, c'est-à-dire quand la différence reconnue entre des ensembles de trois et de quatre pommes devient le *principe* d'une hiérarchisation précise, linéaire et ordonnée, de ces collections selon l'une de leurs *caractéristiques* qu'on appellera leur *quantité*, et qui viendra répondre à la question du *combien* ? Le nombre « psychologique » est donc *déjà* une structure close et séparée, présentant l'aspect d'une échelle de mesure à l'aune de laquelle il est loisible d'ordonner, selon leur cardinalité ou leur quantité — qui n'est au départ qu'une qualité parmi d'autres qui se « quantifie » en s'ordonnant — les collections concrètes finies.

Et il est remarquable que cette échelle de mesure soit *déjà*, au stade psychologique, munie d'une structure opérative, c'est-à-dire de la possibilité de réaliser sur elle certaines opérations — notamment la somme — qui constituent le corrélat *séparé* de certaines opérations concrètes — pour la somme, l'acte concret de rassemblement ou de colligation. C'est d'ailleurs une des thèses majeures de Piaget que cette structure des nombres n'est que le corrélat d'une structure *opératoire*, au sens, me semble-t-il, où les nombres peuvent alors être pensés comme des objets construits pour servir de corrélats « idéaux » à certaines opérations, au départ concrètes — chez Piaget les opérations, en un sens technique que nous préciserons, de *classement* et de *sérialisation* — mais dont la possibilité de « faire structure », c'est-à-dire de « faire système », s'est imposée à l'enfant et s'est distanciée des situations concrètes, s'installant ainsi en une sorte de région séparée dans laquelle les nombres eux-mêmes constituent les substituts idéaux des objets concrets auxquels s'appliquaient initialement ces opérations. De ce processus général, nommé par Piaget « abstraction réfléchissante », de *séparation* d'une structure d'opérations, portant initialement sur des objets d'un certain niveau, et de la création consécutive de nouveaux objets d'un niveau supérieur comme corrélats de ces opérations, Piaget a fourni des analyses détaillées⁶. On sait bien sûr qu'un tel procédé d'engendrement d'entités mathématiques nouvelles a été isolé depuis longtemps, par les épistémologues et les mathématiciens eux-mêmes, comme un des ressorts permanents du développement de la discipline ; ils en ont donné, sous des noms et des nuances différentes, des descriptions précises — qu'on songe à la « thématization » de Cavailles, ou à la « méthode des éléments idéaux » de Hilbert⁷. Mais l'originalité de Piaget est d'en avoir fait une composante essentielle du développement cognitif lui-même, présente dès les premiers stades de la vie psychologique, et qui en constitue un des moteurs principaux. Tout le problème demeure bien sûr de savoir si, comme dans la thèse explicite de Piaget, la thématization mathématique au sens, par exemple, de Cavailles, est bien le corrélat logique exact de l'abstraction réfléchissante psychologique, au sens quasiment où la synthèse cognitive serait déterminée par la possibilité de synthèse logique ; ou si la thématization constitue une traduction formelle approchante, mais nécessairement pervertie car marquée, entre autres, des choix « idéologiques » déterminant les principaux caractères du champ d'idéalités au sein duquel elle prend place (par exemple, de la conception actuelle de l'infini propre à l'idéologie ensembliste, etc.), d'une abstraction réfléchissante quasiment instinctive, à laquelle reviendraient rôle moteur et causalité efficiente⁸. Et ce problème devra bien sûr être

ou encore d'innéisme chez [S. Dehaene, 1997]. Mais l'hypostase des faits expérimentaux très circonscrits en vérités philosophiques concernant les mathématiques y est souvent caricaturale.

⁶ Pour un exposé théorique, cf. [Piaget, 1970]. Pour une étude de cas pratiques [Piaget, 1977].

⁷ Rappelons simplement le texte ultra-célèbre de Hilbert « Sur l'infini » [Hilbert, 1925] dans lequel la méthode des éléments idéaux est présentée comme une des plus caractéristiques et créatives de l'activité mathématique : devant tel problème, « souvenons-nous que nous sommes mathématiciens ».

⁸ On retrouve bien sûr ici l'une des énigmes récurrentes des approches génétiques et cognitives en épistémologie des mathématiques. Elle est d'ailleurs présente à des stades plus élémentaires : la question des rapports exacts entre

abordé dans sa dimension la plus générale : celle de la compréhension et de l'analyse des liens reliant ce domaine ordonné mais encore *cognitif* des nombres, apparu dans l'esprit de l'enfant pour structurer ses actions relatives aux quantités discrètes, à la structure des nombres entiers naturels telle qu'elle est plus tard reconstruite formellement au sein de la théorie mathématique.

Il apparaît néanmoins nécessaire, dans un premier temps, de revenir plus en détails sur le développement de ce domaine cognitif des nombres. C'est dans un ouvrage déjà ancien, *La genèse du nombre chez l'enfant*, paru à Neuchâtel en 1941⁹, que les idées de Piaget sur le nombre, et les expériences célèbres qui les ont suscitées, se trouvent présentées le plus précisément. De cet ouvrage dense et très détaillé, on ne retiendra ici que les grandes conclusions, passant, volontairement mais à regret, sur certains points factuels dont l'exposé technique, comme l'interprétation en termes d'épistémologie mathématique, nécessiterait de trop longs développements.

A la lecture de l'ouvrage il apparaît que, des nombreuses étapes du développement intellectuel de l'enfant, trois en particulier, sont déterminantes pour l'élaboration de l'idée de nombre. Elles aboutissent au fameux stade des « opérations concrètes », atteint habituellement entre 7 et 8 ans, et au niveau duquel l'enfant, devenu simultanément capable d'inclure, de sérier et de dénombrer, termine, à en croire Piaget, l'acquisition de certaines pratiques dont la réussite implique nécessairement les principaux constituants théoriques de l'idée de nombre. La structure abstraite de l'ensemble des entiers, dont par exemple les axiomes de Peano fixent les caractères dans le cadre ensembliste classique, n'est évidemment pas telle quelle dégagée et représentée par l'enfant de ce stade ; mais elle est en quelque sorte incarnée dans ses actions, et l'enfant se réfère implicitement à ses caractéristiques dans la résolution des problèmes concrets qui lui sont posés.

Les deux étapes précédant le stade des opérations concrètes sont celle des préconcepts et de la pensée symbolique, atteinte entre 2 et 3 ans, et celle de la pensée intuitive, marquée par le primat du figuratif, qui prend place entre 4 et 7 ans¹⁰. Nous ne nous attarderons pas ici sur le stade de la pensée symbolique, bien que conscients du fait que l'étude de la constitution du symbole, et de la façon dont un signe peut renvoyer à une chose ou à une classe de choses — soit qu'il présente encore un rapport direct avec l'objet, comme c'est le cas le plus souvent dans la communication animale, soit que le rapport du signifiant au signifié ait atteint l'arbitraire caractéristique du langage humain — devrait être le préalable de toutes les tentatives sérieuses en philosophie des mathématiques, en particulier de celles visant à une comparaison des activités linguistique et mathématique, qui se trouvent bien sûr confrontées au problème de savoir *de quoi* les mathématiques peuvent être le langage. Sans rentrer dans le détail de la contribution de Piaget à ce problème — nous verrons que pour lui les mathématiques sont en gros le langage de *l'action humaine*, toute structure mathématique n'étant que le corrélat linguistique d'une structure organisée d'*opérations* —, retenons que le « préconcept » caractéristique du stade symbolique reste à mi-chemin de l'individuel et du général, en relevant à la fois de l'image mentale exemplifiant, par la donnée d'un individu type, le concept à venir, et du symbole dans son rôle générique.

l'opération, au sens piagétien de conduite générique réversible instituée en système, et *l'opération* au sens mathématique usuel, est également à poser et n'est pas simple. Pour dire les choses grossièrement, l'action se confronte-t-elle "pour de bon" à certaines réalités/idéalités mathématiques effectives, et la possibilité logique d'opérer sur ces réalités/idéalités (de les additionner, etc.) se traduit-elle, sur le plan de l'action, en conduite générique (de colligation, etc.), ou les réalités/idéalités et les opérations qui les relient sont-elles *construites* à partir de l'action, dont elles traduisent formellement les principaux caractères ?

⁹Cf. Piaget (1941).

¹⁰ Je m'inspire également, pour la présentation des thèses de Piaget, de Bideaud, Houdé et Pedinielli (1994).

Plus intéressant pour nous est le stade de la pensée intuitive préopératoire. L'intuition est, pour Piaget, une pensée imagée portant sur des *configurations d'ensemble* et non plus, comme au stade précédent, sur des figures simples, mi-génériques, mi-individuelles, symbolisées par des exemplaires types. Prenons par exemple, comme guide de la progression de l'enfant et pour comprendre les tenants de la pensée « intuitive », l'épreuve bien connue de correspondance entre deux rangées de jetons, qui revêt une importance spéciale pour l'étude de l'acquisition du concept de nombre cardinal :

Sur une table sont disposés un tas de jetons rouges et un tas de jetons jaunes. L'expérimentateur aligne six jetons jaunes et demande à l'enfant de placer sur la table *autant* de jetons rouges. Entre 4 et 5 ans environ, l'enfant construit, en serrant plus ou moins les jetons, une rangée de même longueur que celle de l'expérimentateur, sans que la densité soit nécessairement la même que celle de la rangée modèle. Il s'agit ici de ce que Piaget appelle l'*intuition simple*. Vers 5-6 ans en moyenne, l'enfant opère une correspondance terme à terme, c'est-à-dire qu'il articule spatialement la configuration en alignant six jetons rouges en regard de chacun des six jaunes. Il s'agit maintenant de l'*intuition articulée*. Mais il suffit que l'expérimentateur éloigne le dernier jeton de sa rangée pour que l'enfant renonce à l'équivalence et ajoute un (ou plusieurs) jeton(s) jaune(s) à sa propre rangée. Il faut alors attendre le stade proprement *opératoire*, entre 7 et 8 ans, pour que l'enfant consente à admettre que l'égalité est conservée même après l'éloignement du dernier jeton, et quelle que soit d'ailleurs la configuration adoptée pour la première rangée¹¹.

De ces données factuelles, expérimentales, objectives, Piaget propose une interprétation restée célèbre : pour lui cette évolution consiste essentiellement en un gain progressif de réversibilité et de coordination dans les *actions* de l'enfant, auquel correspond *corrélativement* une évolution des notions de qualité et de quantité. Ainsi, lors du premier stade de l'intuition simple, l'enfant ne sait pas *décomposer* la configuration qui lui est présentée. En particulier une classe d'objets n'est pas comprise comme une multiplicité d'éléments distincts — en un sens la notion de « multiple », et donc celle de quantification extensive, n'existent pas encore — mais envisagée dans son ensemble, de façon globale, et reproduite uniquement sous la forme d'une « Gestalt » de bonne forme. Seuls certains traits saillants en sont dès lors privilégiés ; en particulier, pour une rangée de jetons, celui de la longueur globale, ou celui de l'épaisseur dans d'autres circonstances. Ces traits d'une configuration ne sont bien sûr envisagés que relativement aux autres configurations, et non dans leur autonomie, c'est-à-dire que par exemple la qualité abstraite « longueur » n'est pas dégagée, mais que l'enfant ne connaît que des configurations plus ou moins longues les unes par rapport aux autres, c'est-à-dire des *rappports globaux* entre configurations. Et si chacun de ces rapports globaux est susceptible d'engendrer un rapport inverse — par exemple si « plus long » est associé à son inverse « moins long » —, les différents rapports agglomérés dans une même perception d'ensemble ne sont pas coordonnés mais seulement juxtaposés, et ne s'organisent donc pas encore en un système réversible, dont seul le stade opératoire verra l'achèvement. Ils ne sont d'ailleurs encore que rarement considérés vraiment simultanément ; c'est ainsi que dans le cas de la rangée de jetons, l'enfant du premier stade intuitif privilégie la considération de la longueur à celle de la densité, dont d'autres expériences montrent cependant qu'elle rentre parfois explicitement en compte, à titre elle aussi de rapport perceptif global, c'est-à-dire de qualité saillante de la configuration — et non à titre d'ensemble de rapports entre les éléments composant la rangée, ceux-ci n'étant pas encore clairement séparés.

Le second stade, dit de l'intuition articulée ou de la correspondance qualitative, voit le début d'une véritable coordination entre ces différents rapports globaux de longueur, de densité, etc. Une même importance leur est désormais attribuée, et la comparaison entre deux figures se fait par l'examen systématique de leurs ressemblances ou différences selon

¹¹ Cf. Pour une présentation de l'expérience contemporaine [Bideaud, Houdé & Pedinelli, 1994, pp. 360-367].

ces rapports. C'est ainsi que l'enfant reproduit correctement, dans un premier temps, la rangée de jetons. Mais pourquoi éprouve-t-il le besoin, pour maintenir l'équivalence, de rajouter des jetons après déserrément de la première rangée, privilégiant ainsi la seule longueur au détriment de la densité, et retombant ainsi dans les travers du premier stade ? C'est que la coordination entre longueur et densité reste imparfaite, faute en particulier d'une bonne compréhension de la réversibilité et d'une multiplication correcte des rapports : ainsi il ne saisit pas encore qu'une augmentation de longueur entraîne, et est compensée, par une baisse de la densité¹². Et pour Piaget la raison profonde, qu'il nous faudra méditer avec soin, en est qu'à ce stade « l'instrument de coordination de ces différents critères ou rapports n'est pas encore l'opération comme telle, mais toujours *la figure elle-même* ». L'enfant se montre incapable d'une *coordination abstraite* ou opératoire des rapports en jeu, et demeure attaché au seul principe d'unification que lui fournit *l'intuition de la figure*. Il nous faudra tirer les conséquences de cette interprétation, quant à la compréhension de la façon dont une figure empirique est susceptible d'informer et de permettre le dégagement d'une *forme d'opération abstraite*, et dont une opération est elle-même susceptible de s'ériger « idéalement » en instrument de coordination des différents caractères concrets d'une figure empirique ; c'est-à-dire, en très gros, de la façon dont les mathématiques émergent du réel et dont ils en viennent ensuite à le légaliser extérieurement. Retenons pour finir qu'à ce stade, la notion d'unité arithmétique n'est pas précisément constituée : deux collections ne sont considérées équivalentes qu'en vertu des relations de correspondance *qualitative* existant entre leurs éléments ; c'est-à-dire que par exemple le jeton situé à l'extrême gauche de la première rangée partage cette qualité distinctive avec celui à l'extrême gauche de la seconde, et ainsi de suite, mais que les jetons d'une même rangée ne sont pas encore considérés comme équivalents et substituables les uns aux autres. La correspondance qualitative établie entre les figures, et caractéristique du stade de l'intuition articulée, n'est donc encore qu'une correspondance *entre leurs parties respectives*.

C'est précisément le double caractère de similitude rigoureuse et néanmoins de discernabilité, propre aux unités arithmétiques, qui est conquis au cours du stade opératoire : on peut dès lors disposer comme on le veut les éléments de la seconde rangée sans perturber l'enfant dans sa conviction d'équivalence avec la rangée témoin. Ce progrès est dû, selon Piaget, à l'affranchissement définitif de la figure et de l'intuition perceptive. Les relations entre configurations atteignent alors à une coordination durable, *sans qu'il ne soit plus besoin de recourir à cette intuition unifiante qu'est la figure actuelle*. Dès lors, une opération quelconque, par exemple déplacer un jeton vers la droite — ce qui revient à augmenter le rapport perceptif « longueur » de la rangée — n'est plus immédiatement absorbée par le résultat intuitif obtenu ; mais elle s'en dégage, et en particulier l'action devient capable de revenir en arrière. Le sujet comprend ainsi que toute transformation peut être compensée par la transformation inverse, et donc que n'importe quel arrangement peut engendrer n'importe quel autre arrangement. Remarquons que le sujet apporte habituellement plusieurs justifications au maintien de la correspondance après déplacement d'un jeton, caractéristiques de divers degrés d'organisation de ses opérations : soit il affirme qu'il y a correspondance « parce qu'on peut revenir en arrière », ce qui constitue un argument de réversibilité, soit « parce qu'on n'a rien ajouté ni enlevé », ce qui est plutôt un argument d'identité, soit, de la façon la plus élaborée, « parce que c'est plus long mais moins dense », ce qui constitue l'argument de compensation. Bref, l'ensemble des opérations réalisables sur une figure donnée se coordonne dès lors en une structure précise, dont la réversibilité assure la constance et l'équilibre, et à laquelle Piaget, l'ayant formalisée, a donné le nom de « groupement »¹³. C'est-à-dire au fond, me semble-t-il, que

¹² Néanmoins se fait jour, à ce stade, une première forme de réversibilité, l'enfant admettant tout de même la possibilité, après déformation de la figure, de revenir à la forme initiale à partir de la forme altérée.

¹³ Cf. [Piaget, 1949] pour un exposé général. Cf. [Gréco, Grize, Papert & Piaget, 1960] pour une formulation plus détaillée.

l'ensemble des *caractéristiques* relatives d'une figure s'est transmuée en un ensemble d'*opérations* réalisables sur cette figure, et susceptibles d'être inversées. Ainsi par exemple *la longueur* n'est plus à proprement parler une propriété naturelle de la rangée, mais prend — ou, pour nous, retrouve — le statut d'un simple corrélat formel de l'*opération* d'allongement. Une structure opératoire, séparée, a donc émergé des données empiriques sous l'effet des expériences du sujet. Elle permet une relecture des données sensorielles primitives — les qualités saillantes de la figure — et leur traduction, à un niveau supérieur, en corrélats d'autres entités plus fondamentales, qui sont les opérations elles-mêmes. On reconnaît là, bien sûr, les débuts mêmes de l'activité mathématique.

De toute cette évolution, Piaget a proposé des formalisations évoluées. Il serait superflu d'entrer ici dans leurs détails, mais il peut nous être utile d'en présenter les grandes lignes. Les différents stades du développement intellectuel de l'enfant peuvent se décrire en référence à certaines conduites récurrentes de son évolution, en particulier celles de « classement » et de « sériations », qu'on retrouve à l'occasion de chacun des domaines d'objets auxquels il est soumis. Ces conduites, qui vont devenir peu à peu des opérations réversibles au sens strict, s'organisent respectivement en structures de classes et de sériations. Très schématiquement, la théorie des classes est une théorie des éléments et objets considérés selon leurs ressemblances ; elle formalise donc les représentations auxquelles parvient l'enfant par l'établissement spontané de relations d'équivalence entre les choses. La théorie des sériations formalise quant à elle les conduites basées sur l'établissement de relations d'ordre, le plus souvent transitives, entre les objets. Il est remarquable que les développements de ces deux grands types de structures soient rigoureusement parallèles, et que leurs étapes correspondent aux grands stades décrits précédemment. Plus généralement ces stades correspondent, selon Piaget, à ceux de la constitution de l'idée même de *quantité*, et donc à trois niveaux de développement de cette notion : dans *La Genèse du nombre chez l'enfant* de 1941, ces stades sont respectivement présentés comme celui de la *quantité brute*, de la *quantité intensive* — au sens kantien, qui est aussi le sens physique usuel — et de la *quantité extensive* proprement dite, la seule véritablement mathématique. Dans l'*Introduction à l'Epistémologie génétique* de 1949, Piaget est revenu sur ces distinctions — il le fera encore plusieurs fois par la suite — pour proposer comme ligne d'évolution un stade proprement *intensif*, régi par de simples élaborations « logiques », suivi de deux stades *extensifs*, déjà « mathématiques », c'est-à-dire marqués par un début de *quantification* véritable, à peine esquissée dans le premier et achevée, sous son aspect véritablement *métrique*, c'est-à-dire *numérique*, dans le second. Et ces différents stades déterminent, en parallèle, trois niveaux d'organisation différents des structures de classe et de sériation.

Ces deux systèmes de distinction — celui de 1941 et celui de 1949 — sont largement incompatibles, même abstraction faite de leurs différences terminologiques. Par la suite fut surtout repris, et largement nuancé, celui de 1941. Présentons-le rapidement. Le premier stade de la *quantité brute* correspond on l'a vu à celui des simples rapports entre *qualités brutes*. Sur le plan des classes (qui est celui des *ressemblances* entre configurations), il correspond en gros au domaine des propriétés de la simple notion d'inclusion transitive : une classe A est incluse dans une classe B si les qualités de B sont vérifiées par A. Mais nulle comparaison *quantitative* n'est permise entre A et son complémentaire A' dans B, et aucune *mise en proportion* des différences entre classes n'est donc encore permise. De même, sur le plan des relations asymétriques transitives (qui mettent en évidence les *dissemblances* entre configurations), une rangée A est perçue comme plus petite qu'une rangée B, elle-même plus petite qu'une rangée C, mais sans qu'il soit possible de comparer la différence entre A et B à celle existant entre B et C, ni même simplement la longueur de A à celle de sa complémentaire A' dans B. Remarquons que dès ce stade, les rapports entre structures de classe et de sériation sont permanents : un ensemble de deux rangées est perçu

à la fois sous l'angle des rapports de classes envisageables selon les qualités retenues, et sous celui des rapports de sériations envisageables selon les qualités comparables (longueur, densité, etc.). Le second stade, dit de la quantité intensive, voit quant à lui le début de deux *opérations* complémentaires : une sériation additive, ou décomposition du tout en parties, et une *multiplication* effective des différentes qualités globales de la configuration les unes avec les autres. Dans le cas des classes, la sériation additive a par exemple pour effet qu'une rangée de jetons est maintenant décomposée en éléments distincts, qui acquièrent une identité propre ; et dans le cas des relations asymétriques transitives, la longueur de la rangée est, par exemple, dorénavant perçue comme dépendant directement et uniquement des différents intervalles entre ses éléments constitutifs. Ces opérations sont formalisables par une pré-opération d'addition, la classe étant considérée comme somme de ses éléments, et la longueur comme somme des intervalles. La multiplication des qualités globales permet quant à elle de comparer, par exemple, une augmentation de longueur à une baisse de densité. Elle seule permet d'ailleurs l'établissement de la première correspondance exacte du second stade entre rangée construite et rangée témoin, qui nécessite une co-multiplication des deux rangées par une opération de correspondance. Remarquons que ces opérations de partition et de multiplication s'accompagnent d'un gain nouveau, qui préfigure la constitution prochaine du nombre, et dont les circonstances nous intéressent au premier chef : c'est que, sitôt ce début de coordination opératoire, les différences perçues sont *mesurées*, et, à défaut de données numériques, elles sont *mesurées les unes par les autres*, toute augmentation de longueur, par exemple, étant égalée ou comparée à la diminution concomitante de densité, ou l'inverse. Il y a donc un stade propre de la *mesure*, de la *mise en proportion*, étape encore *figurative*, tributaire de l'intuition spatiale, et qui trouvera son achèvement peu après, quand au stade opératoire se constituera définitivement la notion abstraite d'*unité*. Pour le moment néanmoins, les comparaisons se font encore qualitativement, et en particulier si les différents éléments d'une même multiplicité ont pris une individualité propre, celle-ci n'est pas tant encore, en un sens, révélatrice d'une *entité logique*, qu'attachée à certains caractères concrets et distinctifs des éléments en question, comme par exemple leur position spatiale au sein de la multiplicité.

Au stade proprement opératoire enfin, qui est le premier stade véritablement extensif, les opérations se libèrent définitivement de l'intuition de la figure, et se coordonnent en un système réversible. On est frappé, à la lecture de Piaget, par la façon dont il semble que cette réversibilité occupe le rôle moteur prédominant de cette évolution ; c'est comme si l'enfant, comprenant « soudain » la possibilité qui lui est donnée d'ordonner *logiquement*, en un système *clos*, stable et *réversible*, l'ensemble de ses actions sur les choses, renonçait brutalement aux données sensorielles et à la rigidité des configurations empiriques pour les *subordonner* à cette structure opératoire, et transformer les données physiques en *corrélats* de ses propres transformations. L'organisation *logique* semble alors pourvue d'une causalité efficiente ; elle n'est plus simple *modélisation*, simple symbolisation ou formalisation d'un ensemble d'actions, mais détermine par sa dynamique propre leur évolution d'ensemble et leur détachement des déterminations concrètes.

Bref, la structure opératoire dont les configurations concrètes sont les corrélats s'étant définitivement imposée à l'enfant, celui-ci renonce aux injonctions de l'expérience, et en particulier admet qu'un élément quelconque d'une configuration concrète puisse être considéré comme équivalent à tout autre, indépendamment de leurs différences manifestes, puisqu'ils sont susceptibles des mêmes transformations et combinaisons. Ainsi se réalise, dans le domaine des classes, l'«égalisation des différences», qui trouve son parallèle dans le domaine des sériations : c'est alors que par exemple, dans une rangée de jetons, chacun des intervalles, quelle que soit sa véritable longueur, devient logiquement équivalent aux autres. Les opérations réalisables sur les classes, c'est-à-dire les conduites de classification,

comme celles réalisables sur les relations asymétriques transitives, c'est-à-dire les conduites de sériation, s'ordonnent alors simultanément en la première structure véritablement stable et réversible rencontrée dans le développement de l'enfant : la structure de *groupement*, dont la formalisation laisse apparaître, par rapport à celle du groupe mathématique, un certain nombre de postulats restrictifs. Donnons par exemple la structure de groupement de la classification ; si A, B, C, etc., sont des classes emboîtées et A', B', C' leurs complémentaires sous la suivante, on a¹⁴ :

- (1) $A + A' = B ; B + B' = C ; \text{etc.}$
- (2) $B - A' = A ; C - B' = B ; \text{etc.}$
- (3) $A + 0 = A$
- (4) $A + A = A, \text{d'où } A + B = B ; \text{etc.}$
- (5) $(A + A') + B' = A + (A' + B')$
mais $(A + A) - A \neq A + (A - A)$ car : $A - A = 0$ et $A + 0 = A.$

Puis, comme on sait, et comme Piaget et J.B. Grize l'ont formalisé¹⁵, d'une synthèse logique entre les structures de groupement de classification et de sériation naît la notion du nombre naturel. C'est donc à dire, plus précisément, qu'à l'occasion des configurations concrètes quelconques, se développent des conduites opératoires qui, considérant à la fois chaque élément comme identique aux autres — ce que permet l'achèvement de la structure des classes, la cohérence globale du système des opérations de classification, s'étant imposée à l'enfant, lui permettant de faire définitivement « abstraction » des qualités différentielles des objets — et chaque *différence* entre deux éléments comme identique à toutes les autres — ce que permet parallèlement l'achèvement de la structure des sériations —, reviennent à conférer à toute configuration concrète, à tout ensemble d'objets du monde, une structure véritablement extensive, et à la rendre ainsi susceptible d'être dénombrée, classée, séparée de plusieurs façons différentes en deux quantités sans perdre son identité numérique (signe concret de la reconnaissance, par exemple, que $2 + 4 = 1 + 5 = 3 + 3$, etc.) ; autant de signes tangibles, à en croire Piaget, de la possession de la notion de nombre par l'enfant. Remarquons que si d'un point de vue logique les axiomes de Peano déterminant l'ensemble des entiers naturels sont, comme l'a montré Grize¹⁶, déductibles des axiomes combinés des deux structures de groupement des classes et des sériations¹⁷ — c'est-à-dire que la *structure opératoire* caractéristique du nombre entier apparaît lorsque les éléments de configurations concrètes sont pensés à la fois comme supports des *structures opératoires* de classement et de sériation — sur le plan cognitif en revanche l'accès aux trois structures opératoires semble simultané : c'est, pour Piaget, que le stade opératoire est caractérisé essentiellement par l'accès à une structure close et réversible d'organisation des opérations, qui s'impose à l'enfant dans tous ses aspects aux alentours de 7 ans, et dont le groupement des classes, celui des relations asymétriques et le pseudo-

¹⁴ Cf. par exemple Piaget (1996), p. 45.

¹⁵ L'exposé le plus complet s'en trouve dans [Gréco, Grize, Papert et Piaget, 1960].

¹⁶ Cf. *Ibidem*.

¹⁷ L'axiome de récurrence pose cependant certains problèmes. Clause de fermeture du domaine des nombres, il assure aussi son infini. Or au début du stade opératoire, le domaine des nombres, bien que constitué en droit, n'est pas infini. C'est là une des grandes faiblesses de l'entreprise de Piaget, qui plus généralement marque peut-être une différence irréductible entre l'idée de nombre à laquelle parvient l'enfant et celle véhiculée par la formalisation, tout du moins dans le cadre ensembliste classique — les tentatives intuitionnistes demandant bien sûr à être étudiées différemment. Mais l'étude détaillée de cette question nécessiterait de longs développements ; retenons simplement ici qu'au stade opératoire qui nous intéresse, ce qui fait la nature profonde du nombre est assimilé par l'enfant. Il est ainsi, je pense, possible d'isoler une *espèce naturelle* ou un *geste fondateur* du nombre entier — dont il faudra ensuite observer ce que la formalisation est susceptible d'en garder ou par quels moyens et pour quelles causes elle le pervertit — qui est en gros celui de la séparation des opérations de la figure dont parle Piaget ; il coïncide avec les débuts de la *mesure*, et le stade opératoire en voit l'achèvement.

groupe des nombres sont trois manifestations complémentaires, selon qu'elle s'applique aux équivalences, aux différences, ou aux équivalences et différences réunies. Ce point permet entre autres à Piaget de critiquer la volonté de Russell de construire le nombre cardinal à partir de la seule notion de classe, et de procéder pour les ordinaux à partir des seules relations asymétriques ; pour Piaget les deux notions de classement et de sériation sont immanentes au nombre entier naturel, irréductiblement cardinal et ordinal, et la construction des *Principles* reprise dans les *Principia*¹⁸ souffre, dans chacun des cas, d'appels implicites à celle des deux qui est rejetée¹⁹.

Remarquons pour finir, que si nous avons jusque-là suivi le développement de l'enfant dans le seul domaine de la quantité discrète, une évolution strictement parallèle se produit pour la quantité continue : en particulier, au stade opératoire, se constituent, parallèlement à ceux de classification et de sériation, des groupements de partitions et de déplacements, dont la réunion logique donne la structure de l'opération de *mesure*, au sens géométrique ; le nombre n'est donc au fond que l'équivalent discret de cette opération.

CONCLUSION

L'exposé qui précède n'a qu'une excuse : celle de montrer comment il est possible d'envisager, bien avant les structures *opératoires* dont les mathématiques constituées nous fournissent l'exemple — que ce soit celle des réels, dont on connaît l'histoire compliquée (la possibilité d'additionner et de multiplier des raisons ayant été, on le sait, l'un des axes moteurs, au cours des siècles, de la constitution de \mathbf{R} , les réels pouvant d'ailleurs paraître, comme chez Viète, simples *corrélats* des opérations + et \times), ou celle des entiers naturels, qui dans les formulations modernes, au premier ordre, de l'axiomatique de Peano, apparaissent eux aussi comme corrélats des opérations + et \times (les axiomes de définition récurrentielle de + et \times apparaissant à titre de contraintes explicites pour la structure corrélée des entiers) —, des structures *opératoires* à un stade purement *psychologique*. Il existe donc un mode proprement cognitif de se donner un objet et d'opérer sur lui, ou plutôt de percevoir, en la généralisant aussitôt dans le cadre d'une structure logique, la *possibilité* d'une opération dont un objet « idéal » (ou tout du moins « nouveau ») est alors institué en corrélat. Tout le problème reste bien sûr d'analyser avec précision le rapport entre ces actes cognitifs de constitution d'objets et ceux, bien postérieurs, de la mathématique réglée et formalisée. Remarquons encore qu'un des caractères les plus frappants d'une construction comme celle de Piaget est le rôle de causalité systématiquement attribué à la *forme logique* : tout se passe comme si la possibilité, pour un ensemble d'opérations, de *faire système* s'imposait à l'appareil cognitif et déterminait sa structuration. Il est d'ailleurs tentant de rapprocher cette thèse de la thèse métaphysique, d'inspiration en gros platonicienne, que les travaux de René Thom ont, on le sait, inspirée à Jean Petitot, et qui consiste (je le présente bien sûr de façon très grossière et schématique), à investir la forme logico-mathématique d'un phénomène d'une véritable causalité, et donc à en faire davantage qu'une construction visant à une simple modélisation²⁰. Sur ce point tout du moins, on voit donc que l'approche cognitive, si elle ne résout pas tout, est néanmoins susceptible de motiver telle ou telle option philosophique, et donc, à terme, tel ou tel progrès véritable dans la compréhension du phénomène mathématique.

¹⁸ [Russell, 1903] & [Whitehead & Russell, 1910]

¹⁹ Dans Gréco, Grize, Papert et Piaget (1960), Grize critique chacune des formalisations courantes possibles de la théorie des entiers naturels, en particulier celles de Church, de Quine, de Heyting, et montre que chacune d'entre elles fait appel, à des niveaux différents, aux deux structures de classement et de sériation.

²⁰ Il n'est pas anodin, à cet égard, qu'on retrouve souvent, dans les célèbres congrès qui furent consacrés à la théorie des catastrophes et à l'œuvre de Thom, des contributions de psychologues piagétiens.

APPENDICE

Je souhaiterais, à la suite de cet exposé, consacrer quelques lignes aux critiques et commentaires suscités, lors du colloque de Peyresq, par mon intervention. Ils peuvent, je pense, se laisser transcrire selon deux directions principales : c'est d'une part le *positivisme* de Piaget qui, à des esprits marqués par l'histoire et ses dimensions contingentes, peut paraître choquant. L'idée d'un développement de la science linéaire et plus ou moins déterminé par certains caractères intrinsèques, qu'il nous faudrait préciser, semble bien sûr contraire au spectacle fait de détours, d'hésitations, d'accidents véritables, de rapprochements inattendus, que nous dévoile chaque jour et en tout domaine l'historiographie des mathématiques. Ce malaise peut prendre la forme du questionnement suivant : y-a-t-il un lien plausible entre le *sujet épistémique* dont parle Piaget, sujet théorique soumis au jeu des abstractions réfléchissantes successives, et les sujets effectifs de la science, tant ceux des premières constructions cognitives (l'ensemble des enfants de Piaget) que ceux des constructions théoriques postérieures (entre autres les mathématiciens) ? Ou encore, comme certains l'ont judicieusement exprimé à Peyresq, comment parler des enfants de Piaget sans parler aussi des enfants d'Euclide, des enfants de Hilbert, et bien sûr également des enfants de Lacan ? La dernière partie de cette boutade nous met en présence de l'autre grande difficulté, fort connue, d'une conception comme celle de Piaget, et à laquelle réfère une seconde série d'objections entendues au colloque : l'autonomie du développement rationnel de l'enfant par rapport, entre autres, à son développement affectif, est loin d'être un fait acquis, et s'il est difficile d'isoler, dans le développement de l'individu, un domaine propre de la rationalité²¹, le postulat d'un développement des mathématiques qui reproduise parfaitement, plus tard, l'organisation d'un tel domaine — ce qui est l'idée la plus prégnante de l'épistémologie de Piaget, dont on a peu parlé ici — peut sembler bien présomptueux.

Je n'ai évidemment pas l'ambition d'apporter ici de solution à ces problèmes complexes. Le second est un problème proprement scientifique, dont la clé est entre les mains des psychologues et des spécialistes du développement. Je remarquerais simplement, naïvement, que le fait que l'histoire d'un développement rationnel de l'enfant puisse être *contée et reconstruite*, est suffisant, à proprement parler, pour poser et discuter une hypothèse d'isomorphisme avec le développement historique de la science, lui-même largement *reconstruit*, et dont le statut de simple vue de l'esprit ne choque personne. On ne postule, ce faisant, aucune option sur les déterminations causales de l'un ou de l'autre. Pour ce qui est du premier problème, je souhaiterais simplement, en deux mots, indiquer les directions dans lesquelles certaines réponses me paraissent pouvoir être cherchées. Relativement au cas particulier de l'arithmétique, je ne pense pas que Piaget, et plus particulièrement son disciple Grize²², aient jamais nié la diversité des approches possibles de la formalisation, ni n'aient jamais prétendu expliquer les hasards de leurs développements historiques — par exemple l'épisode « ensembliste » issu des travaux de Cantor et de Dedekind, auquel s'associe entre autres une conception actuelle de l'infini qui peut sembler aujourd'hui bien désuète — par une quelconque détermination, qu'elle soit pensée comme d'ordre *logique* ou d'ordre *cognitif*. Leur positivisme prend une dimension plus restreinte : celle du constat que chacune des théories connues de l'arithmétique, quels que soient les détails de son développement, fait appel, à des niveaux différents, à certaines structures, toujours les mêmes (celles de classement et de sériation dans le vocabulaire Piaget-Grize), que Piaget et Grize réfèrent aux structures comparables observées, au cours

²¹ Il est bien sûr toujours possible d'isoler et d'évaluer chez un sujet, comme le fit Piaget, la maîtrise de certaines pratiques qualifiées de *rationnelles* ; mais il est plus délicat de rattacher théoriquement ces pratiques à un domaine autonome possédant des lois de développement et une causalité intrinsèques.

²² Cf. Gréco, Grize, Papert et Piaget (1960), où comme on l'a vu ces problèmes sont abordés précisément.

de sa croissance, dans l'organisation des actions de l'enfant ; organisation elle-même déterminée bien-sûr, en partie, par la structure de la réalité concrète à laquelle l'enfant se trouve confronté, et qui constitue le substrat matériel incontournable à partir duquel une *forme* d'action, puis d'opération au sens technique évoqué antérieurement, peut voir le jour. Que l'organisation des actions de l'enfant, puis des mathématiques dans leur ensemble — malgré leurs détails historiques —, soit entièrement déterminée, en dernière instance, par la structure de cette réalité concrète, constituerait une forme maximale d'empirisme à laquelle Piaget n'a jamais souscrit. Mais que les mathématiques soient *une* forme théorisée et objectivée de la *structure* des pratiques rendues possibles par cette réalité concrète est, spécialement dans le cas de l'arithmétique, un truisme auquel chacun se rattachera. Piaget et Grize ne font, à mon sens, que préciser cette conviction. L'option métaphysique, en gros platoniste, que leurs écrits laissent parfois transparaître, et qui reviendrait à conférer, comme nous l'avons déjà évoqué ici plusieurs fois, à la forme *logique* des organisations cognitive et théorique la véritable causalité efficiente, rendrait d'ailleurs stérile, si elle était prise vraiment au sérieux, toute tentative d'étude psychologique : à quoi bon s'émerveiller, en effet, de retrouver dans les actions de l'enfant des conduites organisées selon les mêmes principes que la théorie des nombres, si ce qui parle et s'exprime en ces actions, c'est précisément la structure du nombre à laquelle l'enfant est confronté ? Ce serait là une forme supérieure de positivisme, dont la poursuite même de ses travaux montre que Piaget est resté distant ; et qui, de toutes façons, comme toute hypothèse générale de cette sorte, se mesure sans doute plus à la fécondité des reconstructions qu'elle rend possibles qu'au confort contemplatif qu'elle peut procurer.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- Beth, E.W. & Piaget, J. (1961) *Epistémologie mathématique et psychologie*, PUF, Paris.
- Bideaud, J., Houdé, O. & Pedinielli, J.L. (1994) *L'homme en développement*, PUF, Paris.
- Changeux, J.P. & Cunes, A. (1989), *Matière à pensée*, Odile Jacob, Paris.
- Dehaene, S., (1997) *La Bosse des Maths*, Odile Jacob, Paris
- Gréco, P., Grize, J.P., Papert, S. & Piaget, J. (1960) *Problèmes de la construction du nombre*, PUF, Paris.
- Hilbert, D. (1925), « Ueber das Uendliche », *Math. Annals*, 95, 1926, pp. 161-190.
- Houdé, O., Miéville, D. (1993), *Pensée logico-mathématique*, PUF, Paris.
- Kitcher, P. (1983), *The nature of Mathematical Knowledge*, Oxford University Press, Oxford, New York.
- Maddy, P. (1990), *Realism in Mathematics*, Clarendon Press, Oxford.
- Piaget, J. (1941) *La genèse du nombre chez l'enfant*, Delachaux et Niestlé, Neuchâtel.
- (1949) Introduction à l'épistémologie génétique, t. I, PUF, Paris.
- (1970) *L'épistémologie génétique*, PUF, Paris.
- (1977) *Recherches sur l'abstraction réfléchissante*, PUF, Paris.
- (1991) *La genèse du nombre chez l'enfant*, Delachaux et Niestlé, Neuchâtel, Paris. Réed. de Piaget (1941).
- (1996) *L'épistémologie génétique*, PUF, Paris. Réed. de Piaget (1970).
- Piatelli - Palmarini, M. (1979) *Théories du langage, théories de l'apprentissage. Le débat entre Jean Piaget et Noam Chomsky*, Le Seuil, Paris.
- Russell, B. (1903) *The Principles of Mathematics*, Allen & Unwin, London.
- (1919) *Introduction to mathematical Philosophy*, Allen & Unwin, London.
- Whitehead & Russell (1910), *Principia Mathematica*, Allen & Unwin, London.