SUR LES INTERPRETATIONS ARITHMETIQUES ET ALGEBRIQUES DE L'ŒUVRE DE DIOPHANTE ENTRE LE XVIe ET LE XVIIe SIECLES : LES *ZETETICORUM LIBRI QUINQUE* DE VIETE

Paolo FREGUGLIA (Pise)

La lecture et le commentaire par Fermat de l'*Arithmétique* de Diophante est, comme nous pouvons le dire à juste titre, de type arithmétique. En outre, il propose une analyse du texte qui va au de là de la simple traduction et ses résultats sont bien connus par les historiens des mathématiques et par les mathématiciens. L'édition sur laquelle Fermat fit ses observations est celle de Claude Gaspard Bachet de 1621. Mais auparavant, dans la période qui va de la seconde moitié du XVIe siècle jusqu'aux premières années du XVIIe siècle, se manifeste un grand intérêt pour l'œuvre de Diophante. Cet intérêt a conduit à la réalisation d'un bon nombre de travaux où l'on trouve la traduction, le commentaire, l'augmentation et l'interprétation des problèmes de Diophante. Nous devons rappeler à ce propos les œuvres suivantes :

— le troisième livre de *L'Algebra* de R.Bombelli (1572)[1]
— *Rerum arithmeticarum libri VI* de G.Xylander (1575)[2]
— l'appendice au second livre de *L'Arithmétique* de S.Stevin (1585)[3]
— *Zeteticorum libri quinque* de F.Viète (1593)[4]

Tandis que les versions de Bombelli, de Xylander et de Stevin ne sont dans l'ensemble rien de plus qu'une traduction, où ne change que la présentation, alors les contenus sont les mêmes et donc l'approche est de type arithmétique, le travail de Viète et des ses élèves (en particulier J.L.Vaulézard (1630)[5] et A.Vasset (1630)[6]) semble être de type algébrique. Nous essaierons de faire une comparaison entre les versions arithmétiques avant Fermat et les *Zeteticorum libri quinque* de Viète. En effet cette œuvre de Viète présente des éléments innovateurs ; en général, on peut dire que Viète part des nombres rationels positifs et va vers les grandeurs.

---

[1] R. Bombelli, *L'Algebra* ([première éd. 1572], prima ediz. integrale a cura di E. Bortolotti e U. Forti, Feltrinelli, Milano, 1966.
[2] G. Xylander, *Rerum arithmeticarum libri VI*, Basileae, 1575.
[3] S. Stevin, *L'Arithmétique*, B.& A. Elsevier, Leyde, 1634 (première éd. 1585).
[4] F. Viète, *Francisci Vietae Opera mathematica […]*, Elzevir, Lugduni Batavorum, 1646.
[5] J.L. Vaulézard, *La nouvelle algèbre de M.Viète précedée de l'Introduction en l'Art Analytique*, réimp. Lib. Arthème Fayard, Paris 1986 (première éd. 1630).
[6] A. Vasset, *L'algèbre nouvelle de Mr. Viète*, Paris, 1630.

LES ZETETICORUM LIBRI QUINQUE DE VIETE

Les *Zeteticorum libri quinque* font partie de ces ouvrages qui, à partir de la connaissance et par conséquent de la diffusion en latin de l'œuvre de Diophante, se rapportent à cette dernière en traduissant et en développant les problèmes et les arguments qui s'y trouvent. D'autre part les *Zeteticorum libri quinque* constituent l'illustration et aussi l'application de la méthode proposée dans l'*Isagoge* et les *Notae Priores*, que ce soit à l'égard de la *logistica speciosa* entendue comme nouvelle forme de calcul, que ce soit en relation au perfectionnement de l'instrument résolutif et à la proposition de nouveaux problèmes. Dans l'ensemble, la méthode de l'analyse clarifiée et présentée en termes épistemologiques nouveaux par Viète, trouve dans les livres des Zététiques son banc d'essai, en se rattachant avec élégance et efficacité au courant classique, d'où elle provenait du reste. Viète écrit cette œuvre, composée de cinq livres, de 1592 à 1593 et la publie à Tours en 1593. Un tiers des zététiques environ, répartis dans les livres un, deux, trois et quatre et cinq correspondent aux *quaestiones* de Diophante qui se trouvent dans son *Arithmétique,* aux livres un, deux, trois et quatre. Il y a ensuite des zététiques, qui se trouvent en particulier dans le livre trois de l'œuvre de Viète, qui n'ont pas d'équivalents chez Diophante et envisageant des problèmes connexes aux proportions continues. Commençons d'abord par voir, avec une table de correspondance, quels sont les zététiques viètiens qui correspondent à *quaestiones* de Diophante. Nous avons étendu la table ajoutée par François Von Schooten au chapitre quatre de l'*Isagoge* dans l'édition de l'œuvre de Viète du 1646.

DIOPHANTE	VIETE
I, 1	I, 1
I, 2	I, 3
I, 4	I, 2
I, 5	I, 7
I, 6	I, 8
I, 7	I, 4 + Autre
I, 9	I, 5 + Autre
I, 10	I, 6
I, 27	II, 4
I, 28	II, 6 (II, 5) (III, 5) (III, 6)
I, 29	II, 8 (II, 7) (III, 3) (III, 4)
I, 30	II, 3
II, 8	IV, 1
II, 9	IV, 2 et IV, 3
II, 10	IV, 6
II, 11	IV, 7
II, 12	IV, 8
II, 13	IV, 9
III, 7 e II, 8	V, 3
III, 9	V, 4
III, 10	V, 5
III, 11	V, 7
III, 12 e III, 13	V, 8
1° Lemme de V, 7	IV, 10
2° Lemme de V, 7	IV, 11
V, 8	V, 1
V, 30	V, 14
VI, 3	V, 9
VI, 4	V, 10
VI, 5	V, 11

Nous pouvons en outre rapprocher la table de comparaison entre Bombelli et Diophante[7]. On peut voir que Viète, comme à son tour Bombelli de façon plus modeste, a une stratégie de lecture et de classification des problèmes qui est assez diférente de celle de Diophante, à part le choix de problèmes particuliers. Viète considère un type très intéressant de problèmes qu'on ne trouve pas chez Diophante. Il s'agit des problèmes qui concernent les proportions continues, comme le zététique III, 14 qui a l'énoncé suivant :

Dato adgregato extremarum, et adgregato mediarum in serie quatuor continue proportionalium, invenire continue proportionales.

C'est-à-dire que nous devons trouver a, b, c, d telles que $a : b = b : c = c : d$, en sachant que $a + d = D$ et $b + c = B$, où D et B sont assignés.

Passons maintenant au thème que nous croyons être parmi les plus cruciaux des *Zeteticorum libri* et que Viète examine d'une façon originale par rapport à Diophante : l'étude et les applications des triangles (rectangles) numériques. Déjà, Viète commence à analyser ce thème dans le chapitre *Genesis Triangulorum* des *Notae Priores* à partir de la Prop.45 jusqu'à la Prop.61. Nous utiliserons de suite la Prop. 45 susdite.

LES TRIANGLES NUMERIQUES DANS LES *ZETETICORUM LIBRI QUINQUE*

Dans le livre trois, quatre et cinq des *Zeteticorum libri quinque* nous trouvons des problèmes relatifs aux triangles (rectangles) numériques. Les triangles numériques sont examinés par Diophante dans le livre six de son *Arithmétique.* Par exemple dans le livre trois nous avons les zététiques III,3, III,4, III,5, III,6, III,8, III,9 qui concerne cet sujet. Mais il s'agit , le plus souvent, d'une façon géométrique d'écrire un énoncé simplement arithmétique. Comme le III,3 :

Dato perpendiculo trianguli rectanguli, et differentia basis et hypotenusae, invenire basim et hypotenusam

Est exprimé le problème arithmétique déterminé :

$$x^2 - y^2 = D^2$$
$$x - y = B.$$

Les zététiques III,8 et III,9, qui ont le même énoncé : *Invenitur triangulum rectangulum numero*, répètent substantiellement la Prop. 45 des *Notae Priores,* en la mettant en rapport avec les proportions continues.

Voyons maintenant quelques zététiques du livre quatre des *Zeteticorum libri*. A part les zététiques IV,18, IV,19 et IV,20 qui prennent en considération les cubes, dans les autres zététiques de ce livre, Viète étudie les triangles numériques et leurs applications surtout aux équations indéterminées de deuxième degré. Nous allons mettre en évidence des aspects, c'est-à-dire des zététiques, qui nous semblent être utiles pour comprendre le but théorique par lequel Viète donne une lecture innovative de l'œuvre de Diophante. L'analyse viètienne se développe, dans ce cas, avec comme objectif de résoudre les équations indéterminées de deuxième degré. Il s'agit de faire voir comment les constructions des triangles numériques rectangles peuvent conduire à la solution de ces équations. Comme exemple, nous

---

[7] Voir P. Ver Eecke, *Diophante d'Alessandrie. Les six livres arithmétiques et le livre des nombres polygones,* Desclée, Bruges, 1926, p. LXVI.

examinons le zététique IV,2 . Le commentaire du disciple de Viète, Vaulézard met en évidence l'évolution géométrique algébrique de la lecture de Diophante implicite dans la position viètienne. Le contexte est celui de la théorie géométique synthétique des équations algébriques (déterminées et indéterminées).

Commençons par examiner le zététique IV, 2, qui correspond à la *quaestio* II, 9 de Diophante[8] :

Invenire duo numero quadrata, aequalia duobus aliis datis quadratis

Il s'agit de résoudre l'équation indéterminée :

$$x^2 + y^2 = B^2 + D^2 \tag{3.1}$$

Viète donne deux solutions. La plus traditionnelle (qui est la seconde) se rapporte à Diophante[9]. Il pose :

$$x = A + B \text{ et } y = \left|\frac{S}{R}A - D\right| \tag{3.2}$$

où A dénote l'inconnue et S et R sont deux nombres rationnels positifs arbitraires. En substituant les (3.2) dans la (3.1), nous avons enfin :

$$A = \left|\frac{2R\cdot S\cdot D - 2B\cdot R^2}{R^2 + S^2}\right| \tag{3.3}$$

$$\begin{aligned} x &= \left|\frac{2R\cdot S\cdot D - B\cdot R^2 + B\cdot S^2}{R^2 + S^2}\right| \\ y &= \left|\frac{S^2\cdot D - 2R\cdot S\cdot B - D\cdot R^2}{R^2 + S^2}\right| \end{aligned} \tag{3.4}$$

---

[8] Voir R. Bombelli, *L'Algebra* (1966) III livre "Problema LXII : E' 52 divisibile in due numeri quadrati, cioè 36 e 16. Hor lo voglio ridividere in dui altri numeri quadrati che non siano li medesimi : si domanda quali saranno" et S.Stevin, *L'Arithmétique* (1585) "Question II, 10 : Partons un nombre composé de deux nombres carrez à leurs racines commensurables, comme 13 composé de 9 et 4, en deux autres semblables quarrez".

[9] Selon le commentaire de Maxime Planude (1260 – 1305), à partir de la (3.1) nous avons :

$$x^2 - D^2 = B^2 - y^2$$

C'est-à-dire :

$$(x - D)(x + D) = (B - y)(B + y)$$

qui donne la proportion numérique :

$$(B + y) : (x - D) = (x + D) : (B - y).$$

Posons : $m = (B + y)/(x - D)$ et $A = x - D$ où A est le nombre

Donc : $$\begin{aligned} x &= A + D \\ y &= mA - B. \end{aligned}$$

Voir J. Christianadis " Une interprétation byzantine de Diophante", *Historia Mathematica*, 25 (1998).

qui répresentent la traduction selon *la logistica speciosa* de la procédure de Diophante et de Bombelli et Stevin aussi.

La première solution est sans doute la plus intéressante et la plus originale. D'abord Viète nous invite à rappeler quelques propositions que nous trouvons dans les *Notae Priores*, c'est-à-dire la :

[*Prop.*13, *Notae Priores*]: $(A + B)^2 – (A – B)^2 = 4A·B$

et la

[*Prop.* 45, *Notae Priores*] :

Déterminer un triangle numérique rectangle à partir de deux nombres A et B donnés.

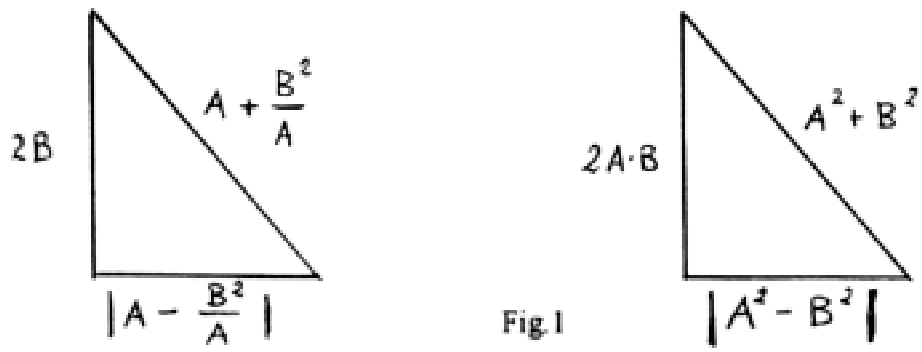

Fig 1

et la :

[*Prop.* 46, *Notae Priores*] :

A partir de deux triangles numériques rectangles construire un troisième triangle numérique rectangle.

C'est-à-dire si nous partons des deux triangles numériques rectangles suivants :

Fig. 2

Nous pouvons déterminer le triangle rectangle numérique suivant :

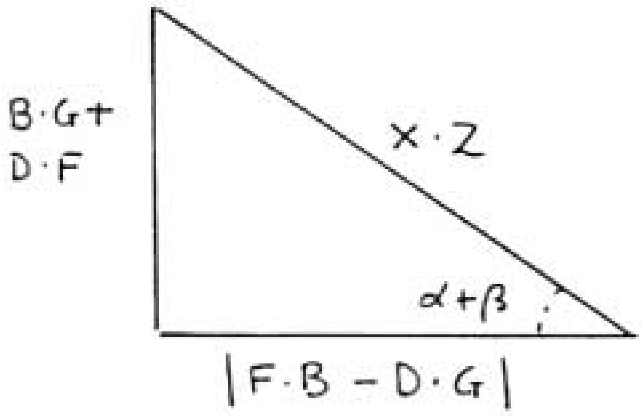

Fig. 3

Cette façon de construire le troisième triangle est appelée par Viète *synaeresis*. De façon analogue, Viète peut construire le troisième triangle.

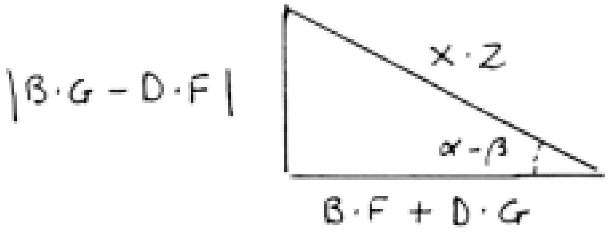

Fig. 4

Et il appelle cette construction *diaeresis*[10] .

Retournons maintenant à la première solution du zététique IV, 2. En ayant assigné $B^2 + D^2$, nous pouvons considérer un premier trangle rectangle numérique (I) (voir Fig.5). Si nous prenons deux nombres arbitraires R et S, grâce à la Prop. 45 des *Notae*,

[10] J.L. Vaulézard, dans son commentaire (*La nouvelle algèbre de M.Viète*, 1630) à l'œuvre de Viète, dit que donnés deux triangles rectangles dont les angles opposés aux respectifs cathètes hauteur sont α et β, alors le triangle rectangle obtenu par *synaeresis* aura l'angle opposé au cathète hauteur égal à $\alpha + \beta$, et celui-là obtenu par *diaeresis* aura l'angle égal à α-β. Il suffit de partir respectivement de la formula goniométrique $sin(\alpha \pm \beta) = sin\alpha cos\beta \pm cos\alpha sin\beta$.

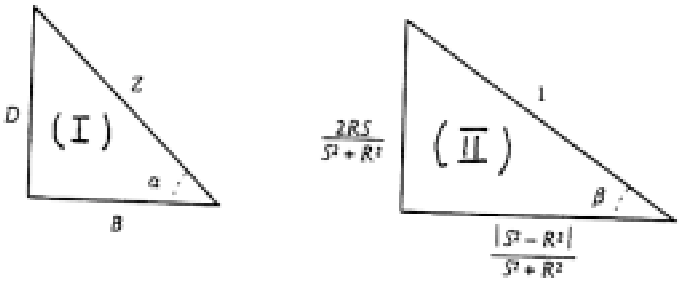

Fig. 5

Priores nous pouvons déterminer un deuxième triangle rectangle numérique (II) (voir Fig.5). Donc Viète applique la *synaeresis* à (I) et (II) selon la Prop.46 des *Notae Priores* et il obtient le troisième triangle rectangle numérique (III) (voir Fig.6). En comparant

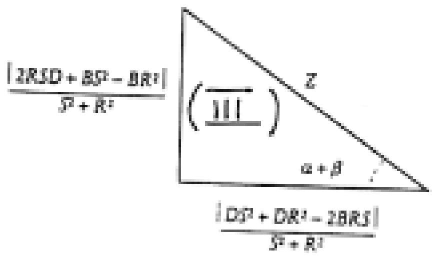

Fig. 6

les triangles (I) et (III) nous avons la solution de l'équation indéterminée (3.2) :

$$x^2 + y^2 = B^2 + D^2$$

c'est-à-dire, nous avons les (3.4).

Vaulézard dans son commentaire (1630) donne du zététique IV, 2 et en particulier de la *synaeresis*, une construction géométrique algébrique, selon l'exégèse géométrique. Voilà la reconstruction que nous avons faite. Si nous considérons la fig. 7 (à droite), nous pouvons établir que :

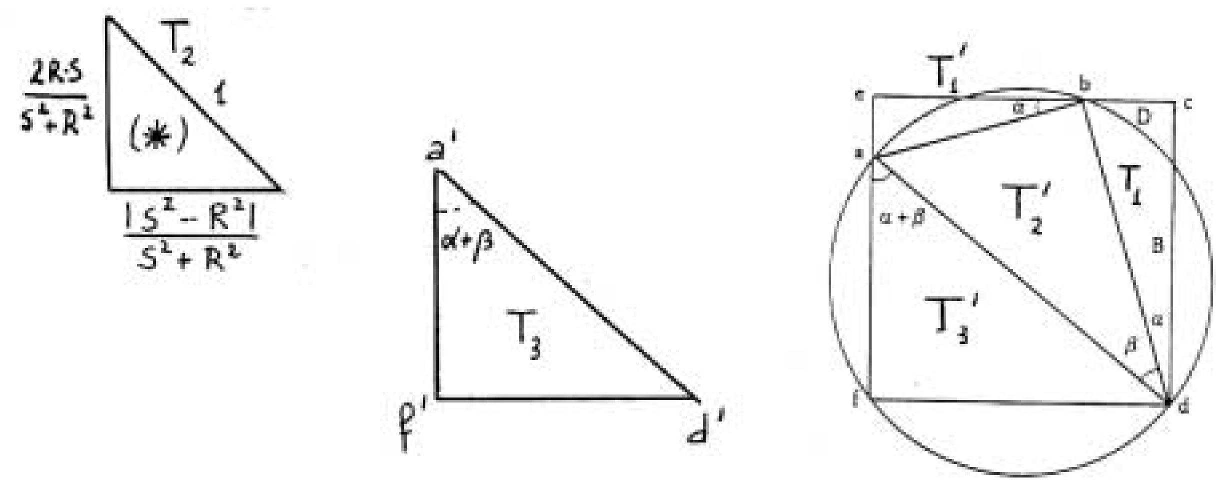

Fig. 7

[***Th***.1] : Le triangle *aeb* est semblable au triangle *bcd*

Interprétons *bc* = B et *dc* = D et donc le triangle *bcd* est le triangle assigné. Posons le triangle *abd* semblable au triangle rectangle numérique (*) déterminé par *R* et *S* grâce à la Prop.45 des *Notae Priores* (voir Fig.7 à gauche). Car *R* et *S* sont arbitraires il est possible que le triangle (*) coïncide avec le triangle *abd*. En analysant la Fig. 7 (à droite), à partir de ses caractéristiques, c'est-à-dire de la géométrie de la construction géométrique, on déduit :

[***Th***.2] : $a'f' = db \cdot af = |db \cdot dc - bc \cdot ba|$
$f'd' = db \cdot fd = db \cdot bc + ba \cdot dc$

Mais nous pouvons obtenir les formules du Th.2 en appliquant directement la *synaeresis* à partir des triangles *bcd* et *abd*. Nous avons ainsi réalisé un modèle géométrique synthétique de la *synaeresis.* D'autre part le triangle *afd* sera a son tour semblable au triangle *a'f'd'* obtenu à partir des triangles *bcd* et *abd* par *synaeresis* (voir Fig.7 au milieu).

Bref, la transformation de *synaeresis* , selon Vaulézard, a les schémas suivants.

$T_1 = \ell T_1'$ $\qquad T_2 = k T_2'$ $\qquad T_3 = h T_3'$

QUELQUES CONCLUSIONS

Nous devons conclure que Viète a conduit sa lecture de Diophante de façon assez originale. Par comparaison à Bombelli et Stevin (pour les quatre premiers livres et Girard pour les deux autres) qui ont fait surtout une traduction arithmétique en utilisant leurs langages et leurs techniques algébriques, Viète a bien travaillé le texte de Diophante en l'améliorant. Bombelli dans son livre trois, a repris beaucoup de problèmes qui ont le caractère de ceux de Diophante et dans son établissement théorique algébrique il considère ce type de problème comme un thème fondamental de l'*Algebra.* Mais une partie seulement des problèmes du livre trois de l'œuvre de Bombelli est une traduction des *quaestiones* de Diophante[11]. Nous avons fourni quelques exemples qui mettent en évidence la stratégie que Viète a suivie. En général il part, comme en son livre quatre, d'un problème de Diophante, qu'il examine selon sa méthode, son langage et ses techniques, et après il conduit son raisonnement en présentant sa solution personelle. Il donne aussi les conditions soit pour l'exégèse numérique soit pour l'exégèse géométrique[12]. Ceci a conduit un disciple comme Vaulézard à faire des constructions géométriques significatives. Comme nous l'avons vu, Viète met en rapport direct la construction de triangles (rectangles) numériques avec la solution des équations indéterminées du deuxième degré.

---

[11] Voir P. Ver Eecke (1959), p. LXVI .

[12] Nous devons ajouter (voir P.Freguglia « Algebra e geometria in Viète », *Bollettino di storia delle scienze matematiche*, IX, (1989) et “Sur la théorie des équations algébriques entre le XVIe et le XVIIe siècle”, *Bollettino di storia delle scienze matematiche*, XIV,(1994)) que d'un point de vue théorique, Viète, dans le traité *De recognitione aequationum* du 1615 établit, par des théorèmes, une correspondance entre une équation algébrique (à une inconnue, déterminée, et jusqu'au troisième degré) et un zététique qui concerne, comme le III, 14 que nous avons examiné avant, les proportions continues. La plupart de ces zététiques ne se trouvent pas dans les *Zeteticorum libri quinque*. Ce n'est pas leur solution qui importe à Viète, mais leur correspondance avec l'équation algébrique considérée.