GEOMETRIE ET CALCUL

COMMENT ANALYSER LEUR RELATION AVEC LE CALCUL TENSORIEL, EN PARTICULIER DANS L'ŒUVRE DE W. VOIGT ?

Bruna GAINO

« L'ange de la géométrie et le démon de l'algèbre luttent pour l'âme de chaque être mathématique »
Hermann Weyl.

Dans la plupart des publications traitant du calcul tensoriel on ne trouve pas de représentation géometrique, bien que ce type de représentation soit considérée comme plus intuitive. Par exemple, on se représente immédiatement un vecteur par une flèche orientée, mais quelle représentation géométrique peut-on effectivement donner du tenseur ? L'absence de représentation géométrique naturelle peut-elle expliquer l'histoire de l'elaboration de ce concept et la manière dont il s'est incorporé au savoir mathématique. Pour tenter de répondre à de telles questions, cet article s'appuiera essentiellement sur l'œuvre de W. Voigt, physicien et cristallographe allemand (1850-1919), connu aussi pour ces travaux dans le domaine de l'élasticité. On completéra aussi l'étude par l'analyse de publications d'autres auteurs qui ont tenté de donner une interprétation géométrique du tenseur, et plus seulement une description purement algébrique.

Pourquoi analyser la définition donnée par un physicien qui a surtout étudié l'élasticité des cristaux ? Les raisons en sont nombreuses. En premier, lieu c'est à Voigt que l'on doit l'introduction du terme tenseur[1] et une première définition de ses propriétés, de plus, celui-ci en donne également une application pertinente dans le domaine de l'élasticité. Et ce, sans liens démontrés avec le calcul différentiel futur instrument indispensable à la généralisation de la théorie de la relativité d'Einstein. En 1900, environ la même année donc que Voigt, Levi-Civita et Ricci donnaient le premier exposé systématique du calcul tensoriel, encore appelé par ces deux auteurs calcul différentiel absolu, et ils attiraient l'attention des mathématiciens et des physiciens sur un certain nombre de ses applications.

[1] C'est à W. Voigt que on doit le nom de tenseur. Dans l'article W. Voigt [1900], il explique la signification du terme : « (...) le nom de *tenseur*, qui, comme celui de *vecteur*, dérive d'un exemple simple et faisant image (le simple allongement d'un volume) ».

Leur article, *Méthodes de calcul différentiel absolu et leurs applications*[2] devait entre autres attirer l'attention du mathématicien Marcel Grossmann qui entre 1912 et 1914 collaborait avec Einstein à la généralisation de la théorie de la relativité. À ce propos, A. Lichnérowicz affirme :

> L'apparition de la théorie de la Relativité qui n'a été possible que grâce à l'existence préalable du Calcul tensoriel,lui a fait réaliser par contrecoup d'immenses progrès. Ce calcul est ainsi devenu un des instruments essentiels de toute la physique théorique moderne[3].

Dans cette considération pourrait, à mon sens, se cacher la raison de la plus grande notoriété du calcul de Ricci et Levi-Civita par rapport à celui développé par Voigt. Toujours dans cette optique on peut citer Léon Brillouin qui reconnaît, dans son livre, le rôle déterminant que W. Voigt a eu dans la définition de la théorie tensorielle mais qui, en même temps, précise :

> La physique théorique moderne fait grand usage des notions mathématiques de tenseurs et de matrices. C'est à propos de la Relativité que ces grandeurs ont été, tout d'abord, reconnues essentielles, et surtout les tenseurs, sans lesquels cette théorie ne peut être expliquée (...)[4].

C'est sans doute à cause d'opinions de cette sorte, du lien direct avec la généralisation de la théorie de la relativité et de la plus grande généralité de la théorie développée par les mathématiciens italiens, qu'en présentant les tenseurs les auteurs rappellent exclusivement ces derniers et négligent totalement l'apport de Voigt.

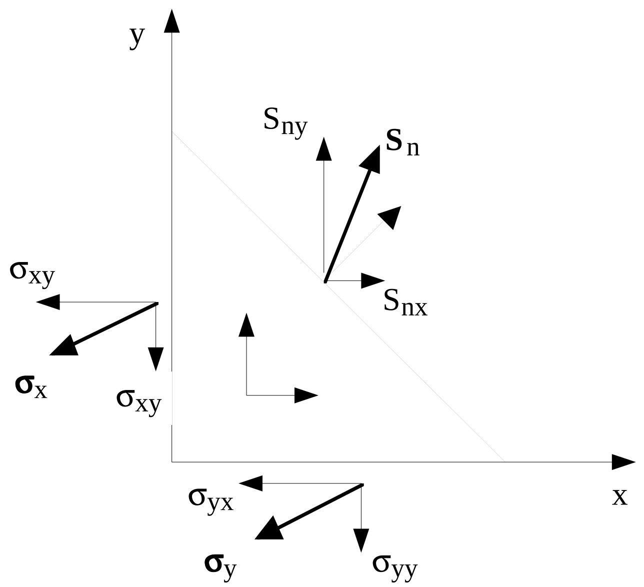
LE TENSEUR EN ELASTICITE

Pour donner une idée assez immédiate et simple du tenseur on peut penser à la théorie générale de l'élasticité et plus précisément à l'état de tension et de déformation d'un corps. Le tenseur est en théorie générale de l'élasticité un ensemble de neuf paramètres σ_{kh} définis par rapport aux coordonnées spatiales. Il est donc un tenseur de second ordre symétrique; un des plus simples exemples parmi les tenseurs.

Dans le corps que l'on étudie, on peut isoler, un tétraèdre de volume V, dont les trois facettes dA_h sont orthogonales entre elles et parallèles aux trois plans coordonnés. Sur chacune de ces facettes agit une force $S_h dA_h$, dont les composantes fournissent les σ_{kh}. L'image, emprentée à la présentation moderne de la théorie de l'élasticité montre ce tétraèdre où est indiquée la force S_h. Une fois connue cette force, grâce aux propriétés du tenseur des tensions, il est possible de déterminer les forces σ_{kh} qui agissent sur les trois facettes parallèles aux axes. Les indices k et h indiquent respectivement la normale au plan sur lequel la force agit et sa direction.

---

[2] G. Ricci, T. Levi-Civita, [1901].
[3] A. Lichnérowicz, [1964], p. 5.
[4] L. Brillouin, [1938], p. 5.



Cette image simplifiée est réductrice du tenseur parce que limitée à un domaine précis, mais conserve tout son intérêt dans l'identification et la définition de cet objet.

D'une manière générale, sans qu'il soit nécessaire de retracer une histoire bien connue[5], le concept général de tenseur est né avec la théorie générale de l'élasticité au XIX[e] siècle dans les années 20. Navier, Poisson et surtout Cauchy, en parlant de « pression » (tension) et déformation dans un corps, définissent presque toutes les caractéristiques de ce concept. Cauchy parle pour la première fois du tétraèdre infinitésimal[6] sur lequel on peut imaginer appliquées les forces internes d'un corps, parallèlement, Navier, pour développer la même théorie, part d'un présupposé différent, à savoir que le corps est formé par un nombre infini de molécules, interagissant entre elles.

Entre autres, de cette question, naît une longue querelle entre les atomistes et les partisans de la vision continuiste. La controverse qui naît de cetteanalyse de la constitution matérielle des corps «un corps est-il formé par un nombre infini de molécules qui interagissent entre elles ou bien peut-on le considérer comme s'il était un continu dont les parties s'échangent des forces égales et contraires ? », est appelée, pour le domaine bien précis de la théorie de l'élasticité, la « controverse des constantes élastiques »[7].

Elle peut être résumée par la question: l'élasticité d'un certain solide homogène et isotrope est-elle représentée par une ou plutôt par deux constantes élastiques ?

Vers la fin du siècle, le cristallographe W. Voigt reprend tous ces concepts (qui entre temps avaient été analysés de plusieurs points de vue mais jamais entièrement définis) et, en se limitant au domaine bien précis de la cristallographie, démontre, avec succès, la validité des deux théories. Il donne ainsi un nouvel élan à la théorie atomiste.

Sûrement influencé par son maître, F. Neumann, le jeune Voigt s'occupe assidûment de thèmes liés à l'élasticité et arrive à imposer ses théories issues du domaine de la cristallographie.

---

[5] C. Truesdell, [1968].
[6] A.L. Cauchy, [1823], pp. 9-13; A.L. Cauchy, [1827].
[7] E. Benvenuto, [1981], pp. 482-486.

Dans ce livre sur les caractéristiques physiques des cristaux, qui date de 1898, Voigt[8] considère les différentes causes externes qui peuvent être à l'origine d'un état bien déterminé à l'intérieur d'un corps. Parmi ces causes, il envisage les actions mécaniques, magnétiques, électriques et thermiques.

Les différents états créés dans les corps, sont représentés par Voigt grâce à trois types de grandeurs différents. Les *scalaires* qui sont caractérisés simplement par une grandeur, comme la température; les *vecteurs*, définis par une grandeur, une direction et un sens, comme la force; et finalement les *tenseurs*.

> Eine einfache Spannung oder eine einfache Dehnung ist, wie ein Vector, durch eine Zahlgrösse und eine Richtung charakterisirt; aber bei den Vectoren sind die beiden Seiten jener Richtung *ungleichwertig*, bei der Spannung und Dehnung sind sie *gleichwertig*, auch sind die Vectoren im allgemeinen durch ihre Projectionen oder Componenten nach drei, etwa zu einander normalen Axen ersetzbar, Spannungen und Dehnungen aber nicht. Eine deutliche Unterscheidung der letzteren Grössenarten von den Vectoren schien deshalb durchaus geboten, und es konnte sich schliesslich nur darum handeln, einen möglichst bezeichnenden Namen zu finden[9].

Voilà l'acte de baptème du concept de tenseur. En regardant de plus près l'œuvre de Voigt, en particulier les articles et les livres publiès entre 1898 et 1910, nous nous trouvons au cœur du problème. Il analyse le concept, développe un raisonnement et, va essayer d'en donner une idée immédiate grâce à une représentation géométrique.

Nous allons analyser ici les définitions et représentations données par Voigt pour essayer de comparer son analyse à celle d'autres auteurs, plus ou moins contemporains en recherchant chaque fois (pour autant qu'elle existe) cette image intuitive du tenseur que Voigt a donnée.

« ETWAS ÜBER TENSORANALYIS »[10]
ELEMENTS NECESSAIRES A LA DEFINITION DU TENSEUR DE VOIGT

Dans son analyse du tenseur, Voigt part toujours de la comparaison avec les autres grandeurs utilisées en physique, à savoir les scalaires et les vecteurs. Il affirme que cette nouvelle espèce de fonctions, «- die ich Tensoren zu nennen vorgeschlagen habe - »[11] joue un rôle très important qui a été souvent attribué aux vecteurs, bien qu'elle possède des propriétés assez différentes.

Les deux sortes de grandeurs sont, en effet, représentées par un nombre et une direction mais en réalité la direction a une signification[12] différente dans les deux cas. La direction des vecteurs possède deux côtés différents [Fig. 94],

---

[8] W.Voigt, [1898]. Ce livre a été traduit en français et publié, en partie, en W.Voigt, [1900]; il a été en outre traduit en italien par A. Sella, [1904].

[9] W. Voigt, [1898], p. V, VI. « Une simple tension ou une simple déformation est, comme un vecteur, caractérisée par une grandeur et une direction; mais dans le cas du vecteur les deux côtés de cette direction sont différents, dans la tension et la déformation ils sont équivalents, de plus les vecteurs peuvent en général être remplacés par leurs projections ou composantes selon trois axes perpendiculaires entre eux, mais non la tension et la déformation. Ainsi s'offre une distinction claire entre ces dernières grandeurs et les vecteurs, et finalement s'agit seulement de trouver le nom le plus caractéristique possible ».

[10] W. Voigt, [1904].

[11] W. Voigt, [1904], p. 495. « — que j'ai proposé d'appeller tenseur —».

[12] Cette apparente affinité avec les vecteurs avait porté à imaginer, pour cette grandeur nouvelle, un nom comme double vecteur ou bivecteur, mais Voigt affirme que, justement, ces noms sont à éviter pour éluder le rapprochement trompeur entre les deux grandeurs.

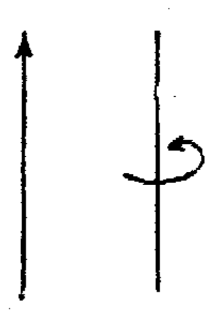


Fig. 94.

> « dans les nouvelles quantités les deux côtés sont équivalents[13], et ceci entraîne des différences essentielles dans leurs propriétés analytiques »[14]. Voigt parle de côtés « gleichwertig », ou de « zweiseitigen Richtung ».

Une des différences liées à la « bilatéralité » est, par exemple, l'impossibilité d'exprimer la grandeur et la direction d'un tenseur symétriquement par rapport aux composantes suivant les axes des coordonnées. En effet un changement de signe dans le tenseur n'implique pas ici un changement du sens comme dans le cas d'un vecteur. Donc un tenseur, à la différence d'un vecteur, peut être soit positif soit négatif, et Voigt indique cela avec les dessins suivants:

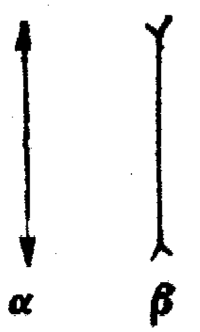


Fig. 95.

α est un tenseur positif, représentant la dilatation d'un corps; β est un tenseur négatif, représentant la contraction d'un corps.

Ne pouvant pas utiliser les projections du tenseur sur les axes, comme pour le vecteur, Voigt propose donc une autre représentation possible. Il utilise deux espèces différentes de fonctions qui peuvent « (...) être considérées comme les composantes suivant les axes, parce que chacune de ces fonctions met en évidence l'un des axes par rapport aux deux autres »[15]. Ces deux sortes de fonctions sont appelées par Voigt de première ou deuxième

---

[13] L'équivalence des deux côtés peut être expliquée par le fait que cette grandeur est donnée, par exemple dans le cas de la tension, par deux forces opposées et égales.
[14] W. Voigt, [1900], p. 5.
[15] W. Voigt, [1900], p. 5.

espèce, ou encore, normales et tangentielles[16], et leurs caractéristiques reflètent pleinement les composantes données pour un tenseur dans la théorie générale de l'élasticité.

Ces « composantes » sont données, selon l'exemple des vecteurs, comme fonctions des cosinus directeurs :

$$A = T\cos^2 (T, x), \qquad B = T\cos^2 (T, y), \qquad C = T\cos^2 (T, z)$$

et

$$D = T \cos(T, y) \cos (T,z), \qquad E = T\cos(T,z) \cos(T,x), \qquad F = T\cos(T, x) \cos(T,y).$$

Malheureusement Voigt ne fait aucun lien entre la figure représentant le tenseur et ces fonctions. Comme on verra dans la suite, cette image est complètement «détachée » des axes de coordonnées et donc des composantes. Néanmoins, ces considérations sur les composantes n'apportent pas de réponse aux questions abordées dans cette article, nous les mettrons de côté pour revenir plutôt à l'image intuitive du tenseur.

Une dernière considération qu'on peut encore faire par rapport à ces composantes est lié au choix de Voigt d'analyser des tenseurs symétriques de deuxième degré, dont l'exemple typique est justement le tenseur déformation et tension. Cette « limitation » est directement liée au domaine d'étude qui est, rappelons-le la cristallographie. Un domaine où precisément les symétries, en générale, ont trouvé un considérable champs d'application et de développement.

LE TENSEUR : UN ESSAI DE REPRESENTATION

Une première idée géométrique est donnée, dans le cas d'un tenseur isolé, en partant du concept de bilatéralité[17].

Dans la II édition, remaniée, du *Elementare Mechanik*[18] Voigt, après avoir introduit la nouvelle grandeur, affirme: « Ihre geometrische Veranschaulichung geschieht passend durch eine Strecke, welche mit ihrem Mittelpunkt in einem festen Punkt liegt und durch ihre ganze oder halbe Länge den Zahlwerth, durch ihre Richtung die zweiseitige Richtung des Tensors darstellt »[19]. La représentation du tenseur est visualisée par une longueur dont le centre se trouve en un point fixe, sa longueur donnant la grandeur du tenseur et sa direction donnant le double sens.

Une définition analogue est encore donnée dans le *Lehrburch der Kristalphysik* en 1910. Ensuite Voigt parlera plus en détail de « polare und axiale Tensoren »[20], dont il donne les définitions et les représentations.

---

[16] Voigt marque la différence entre les deux espèces en disant que pour certaines orientations des axes celle de première espèce sont identiques au tenseur lui-même.

[17] K. Reich, [1994]. L'auteur en parlant du *Lehrbuch* dit simplement que Voigt présente les tenseurs axiaux et polairs. Elle ne fait aucune remarque à propos de l'aspect géométrique.

[18] W. Voigt, [1901, a], p. 578 . La même représentation est donnée aussi dans A. Sella, [1904], et dans W. Voigt, [1910], [1928].

[19] W. Voigt, [1898]. « Sa représentation géométrique appropriée est donc fournie par une distance, dont le point central se trouve en un point fixe et dont la grandeur numérique est représentée par la longuer ou sa moitié, et dont la direction réprésente la double direction du tenseur ».

[20] Voigt introduit ici les propriétées de symétrie relatives aux deux différents types de tenseurs. Il cite en autre l'article de P. Curie, [1894]. Dans cet article, Curie énumère les différentes sortes de symétries des cristaux et suggère la nécessité d'introduire une nouvelle grandeur, différente du vecteur qui est caractérisé par un sens seulement. A l'occasion du Congrès international de physique, Paris 1900, Curie et Voigt lieront ces symétries avec les relatives grandeurs physiques. En particulier le tenseur, la grandeur souhaitée par Curie, sera associé à la symétrie du cylindre circulaire droit. "M. P. Curie donne un bref aperçu de ses vues, anciennement publiées, sur la symétrie des cristaux et sur les grandeurs dirigées, liées aux types de symétrie dans l'espace. Il montre que, si l'on cherche tous les types de symètrie possibles autour d'un

Dans le cas d'une déformation, un tenseur, de nature polaire, est représenté par une double flèche, dont la longueur et la direction fournissent respectivement la grandeur et la direction même du tenseur. Si le tenseur est positif les flèches seront dirigées vers l'extérieur sinon elles seront dirigées vers l'intérieur du segment [Fig. 95].

Le tenseur de deuxième nature est dit axial et il est lié à une rotation. Dans ce cas Voigt assure la bilatéralité grâce au sens inversé des rotations aux bouts du segment; « Die geometrische Darstellung dieser axialen Tensoren kann durch eine Strecke geschehen, welche den Zahlwert wiedergibt, und zwei um die Ende in (absolut) entgegengesetzten Richtungen geschlungene Pfeile, welche für jedes Ende eine Drehungsrichtung angeben und das Vorzeichen des betreffenden Tensors zum Ausdrucke bringen (Fig. 96) »[21].

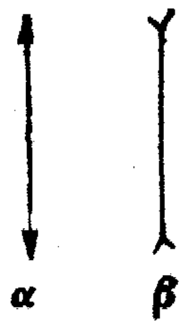


Fig. 95.

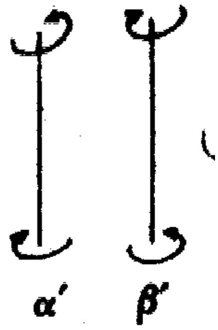


Fig. 96.

Voigt n'arrive malheureusement pas, avec cette représentation, à expliciter les propriétés et la nature même du tenseur. C'est comme si son analyse se limitait à la surface du concept à savoir cette bilatéralité du tenseur donnée par deux forces égales et contraires qui agissent sur un corps, sans rechercher la complexité qui fait l'intérêt du concept. Voigt obtient de meilleurs résultats en analysant le « Tensortripel »[22].

---

point, quel que soit le système que l'on considère, on reconnaît successivement: 1° La symètrie du cylindre circulaire droit (elle comporte un axe d'isotropie, étant la symétrie de l'ordre le plus élevé); 2° La symètrie du tronc de cône, (...). A chacune de ces symétries correspondent des grandeurs dirigées que M. Voigt baptise des noms de tenseur (cylindre), vecteur polaire (tronc de cône), vecteur axial (cylindre tournant). M. Curie propose de désigner par torseur toute grandeur physique répondant à la symétrie du cylindre tordu." [Congrès International de Physique, réuni à Paris en 1900, sous les auspices de la Société française de Physique, Paris, Gauthier-Villars, 1900, tome I, p. 22]. Même s'il est très intéressant et important pour la définition du tenseur, on n'introduira pas ici le concept de symétrie qui pourra par contre faire l'objet d'une analyse ultérieure.

[21] W.Voigt, [1910], pp. 132-133. « La représentation géométrique de ces tenseurs axiaaux peut être donnée par une distance, qui en reproduit la grandeur numerique, et sur les extremités delaquelle il y a des fléches courbées de directions opposées, lesquelles indiquent à chaque bout le sens de rotation et expriment le signe du tenseur en question ».

[22] En allemand *Tensortripel*, à savoir un groupe des trois tenseurs qui ont des directions orthogonales entre elles et des grandeurs indépendantes.

LES TRIPLETS DE TENSEURS ET LEURS REPRESENTATIONS GRACE A L'ELLIPSOÏDE

Pour représenter géométriquement un triplet de tenseurs Voigt fait appel à une tradition déjà bien établie[23], celle de l'ellipsoïde.

Il affirme « Comme les vecteurs sont déduits de leurs composantes par la construction d'un parallélépipède, de même un triple tenseur est déterminé par la construction de la surface du second degré considérée ci-dessus, que nous appellerons, pour abréger, la construction de l'ellipsoïde »[24].

Les axes principaux de la surface donnée par l'équation[25] .

$$\frac{1}{r^2} = A\cos^2(r,X) + B\cos^2(r,Y) + C\cos^2(r,Z) +$$
$$+2A'\cos(r,Y)\cos(r,Z) + 2B'\cos(r,Z)\cos(r,X) + 2C'\cos(r,X)\cos(r,Y)$$

indiquent donc un triplet de tenseur T_1, T_2, T_3 en grandeur et en direction.

La même équation est donnée dans le *Lehrbuch* sous la forme suivante:

$$\pm 1 = T_{11}x^2 + T_{23}y^2 + T_{33}z^2 + 2(T_{23}yz + T_{31}zx + T_{12}xy).$$

Cette deuxième équation a l'avantage d'employer des symboles[26] plus symétriques, qui mettent bien en évidence les six composantes du triplet de tenseur. L'importance de la symétrie pour la définition du concept est, apparemment, de plus en plus présente dans le travail de Voigt, par rapport à ses premiers écrits.

Il affirme :

> Die durch die Gleichung ausgedrückte und durch die Komponenten T_{11}, ...T_{12} bestimmte Oberfläche, die wie sich zeigen wird, für die Veranschaulichung des ganzen tensoriellen Vorganges eine wesentliche Bedeutung hat, mag als Tensorfläche [T] bezeichnet werden. Sie hat je nach den Werten

---

[23] Cauchy, Lamé, Fresnel, avaient déjà commencé à définir l'ellipsoïde pour la détermination des tensions et des directions principales. « Du théorème énoncé plus haut, il résulte que la pression ou tension de chaque point est équivalente à l'unité divisée par le rayon vecteur d'un ellipsoïde. Aux trois axes de cet ellipsoïde correspondent trois pressions ou tensions que nous nommerons *principales*, et l'on peut démontrer que chacune d'elles est perpendiculaire au plan contre lequel elle s'exerce. Parmi ces pressions ou tensions principales se trouvent la pression ou tension *maximum*, et la pression ou tension *minimum*. Les autres pressions ou tensions sont distribuées symétriquement autour des trois axes. (...) », A.L.Cauchy, [1823].

[24] W. Voigt,[1900], pp. 7-8.

[25] La même équation est donnée par Voigt en 1901 (cfr. note 16). Il affirme : « Das Tensortripel T wird nach Grösse und Lage characterisiert durch die centrische Oberfläche zweiten Grades von der durch die sechs Tensorcomponenten bestimmten Gleichung: $T_{11}x^2 + T_{22}y^2 + T_{33}z^2 + r(T_{23}yz + T_{31}zx + T_{12}xy) = \pm 1$, deren Hauptaxen der Lage nach direct mit den resultirenden Tensoren T_1, T_2, T_3, des Tripels zusammenfallen, während sie durch ihre recirpoken Quadrate deren Grössen darstellen » [pp. 245-246].

Dans *Elementare Mechanik*, l'équation est donnée par $\pm 1 = Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2A'yz + 2B'zx + 2C'xy$.

[26] Les notations adoptées pour indiquer les pressions et les déformations dans un corps et donc, parfois inconsciement, le tenseur, n'ont pas été toujours si explicites et symétriques. À ce propos, par exemple, les tableaux de Todhunter et Pearson, [1893], p. 322, et de A.E.H. Love, [1927, IV éd.], p.614, sont très intéressants.

> der Komponenten T_{hi} die Form eines Ellipsoides oder Kombination aus den sich entsprechenden ein- und zweischaligen Hyperboloiden.[27]

Et il continue en faisant appel aux propriétés de symétrie du triple tenseur dans les cas du tenseur polaire et du tenseur axial.

Ces caractéristiques sont donc données, selon Voigt, par les figures suivantes:

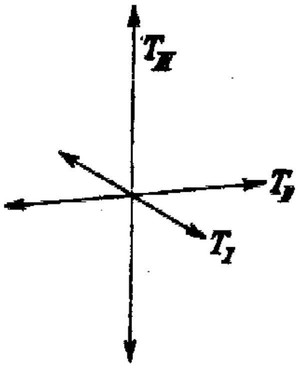


Fig. 97.

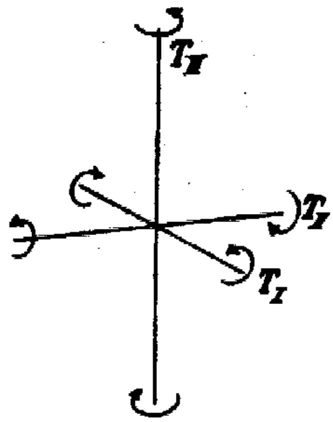


Fig. 98.

Les propriétés de symétrie du triple tenseur sont fournies directement, selon Voigt, à partir de celles du simple tenseur. La figure 97 montre, que le triple tenseur polaire possède un centre de symétrie plus trois axes de symétrie données par les trois tenseurs T_{I}, T_{II}, T_{III}, ces trois tenseurs reliént des plans de symétrie perpendiculaires aux axes.

Pour le triplet de tenseur axiale [Fig. 98] on a trois axes de symétrie mais aucun centre et par conséquente aucun plan de symétrie perpendiculaire aux axes. Dans l'importance donnée à la symétrie pour la définition du tenseur on peut lire la particularisation de Voigt. En cristallographie effectivement, comme nous l'avons dit précédemment, la symétrie joue un rôle centrale. On a déjà rappellé le travail de P. Curie en note [20].

Voigt retourne à cette représentation géométrique valable, dans l'article *Uber die Parameter der Krystallphysik und über gerichtete Grössen höhere Ordnung*[28]. Il y souligne l'intérêt d'une représentation géométrique pour l'étude des caractéristiques des cristaux et en même temps il situe, dans le temps, les premières représentations géométriques de certains phénomènes.

> Die Versuche, physikalischen Eigenschaften der Krystalle durch geometrische Hülfsmittel zu veranschaulichen, sind ziemlich alt. Eines der bekanntesten Beispiele bietet die Darstellung der optischen Eigenschaften gewönlich doppelbrechender Krystalle für eine jede Farbe mit Hülfe eines Ellipsoides oder eines Ovaloides durch Fresnel (...)[29].

---

[27] W. Voigt, [1910] p. 136. « La surface déterminée par l'équation et par les composantes T_{11}, ... T_{12}, et qui a comme nous le verrons une grande importance, peut être qualifié de surface tensorielle [T]. Elle a, suivant les valeurs de composantes T_{hi}, la forme d'une ellipsoïde ou de combinaisons dont il résulte de hyperboloïdes à une ou deux nappes ».

[28] W. Voigt, [1901, b], p. 241.

[29] W. Voigt, [1901, b], p. 241. Le parallèle avec la théorie de l'élasticité et l'ellipsoïde de tension et des déformations est facile si on se rappelle du lien assez étroit entre la théorie de Cauchy et celle de Fresnel. Voir entre autres, la théorie développée par Lamé toujours à propos de l'ellipsoïde. G. Lamé et E. Clapeyron, [1833]; G. Lamé, [1852], 5ème Leçon.

A ce propos, Léon Brillouin affirme que les physiciens ont souvent étudié le tenseur symétrique, à deux indices en construisant une forme quadratique homogène, et recherchant ensuite la nature de la surface de second degré ainsi définie, généralement un ellipsoïde. Il dit en outre, que dans toute la physique cristalline ancienne, il n'était question que d'ellipsoïdes de divers types, qui masquaient les tenseurs symétriques correspondants[30].

Cette façon d'envisager, de manière géométrique le triple tenseur a, encore aujourd'hui, un rôle assez important; on peut citer à titre d'exemple, dans la théorie de l'élasticité la possibilité de déterminer, grâce à cette construction, les tensions et les déformations principales.

AUTRES ESSAIS DE REPRESENTATION GEOMETRIQUE, APRES WOLDEMAR VOIGT

Afin de mettre en évidence d'autres éventuelles représentations du tenseur, l'analyse s'attache à relire d'autres auteurs que Voigt, ayant étudié le calcul tensoriel. On ne trouve pas souvent à present une approche géométrique comme celle de Voigt, il semble que le numérique reste vainqueur en ce domaine. Même les tentatives les plus poussées restent incomplètes, un bon exemple est celui de G. Juvet dans son *Introduction au Calcul tensoriel* .

Dans l'introduction de son livre, il définit son objectif :

> Les premiers linéaments du calcul tensoriel ont leur racine dans le calcul vectoriel. Nous avons rappelé les principes de celui-ci dans la mesure où ils réapparaissent dans celui-là. Nous avons suivi pour ce but, la méthode axiomatique d'exposition, telle qu'elle est développée par M. Weyl dans son livre *Temps, Espace, Matière* mais nous avons atténué le caractère abstrait d'un tel exposé en faisant appel à l'intuition géométrique, pour le cas de deux ou trois dimensions (...)[31] .

Juvet cherche à donner une idée intuitive des concepts de vecteur et de tenseur. Effectivement, dans la première partie du livre, il fait référence au calcul vectoriel avec beaucoup d'intérêt pour une représentation géométrique, mais dans la suite par contre, à propos des tenseurs, celle-ci disparaît complètement.

La seule piste, pourtant dans le domaine de l'algèbre, reste sa définition : « L'ensemble des composantes d'un tenseur est un opérateur qui appliqué à un certain nombre de vecteurs donne une forme multilinéaire de ces vecteurs »[32] .

Un autre exemple concernant la recherche d'une représentation géométrique du tenseur est illustré par les travaux de H. Lang[33] dans les *Annalen der Physik* [1920]. Celui-ci affirme que, selon ses connaissances, aucune représentation géométrique n'a jamais été donnée pour un tenseur dans le cadre de la relativité générale. Cependant il estime qu'une telle démarche est importante pour améliorer la compréhension et l'évaluation du phénomène physique. Dans ce but, il plonge un espace de Riemann dans un espace euclidien et il essaye de montrer comment y représenter un tenseur de 2° ordre, 3° ordre et ainsi de suite.

Dans le cas d'ordre 2 il affirme :

« Les tentatives, de rendre clairement les propriétés physiques des cristaux visibles géométriquement, sont assez anciennes. Un des exemples les plus connus propose la représentation, par Fresnel, des propriétés optiques gewönlich des cristaux habituels à double réfraction pour chaque couleur à l'aide d'un ellipsoïde ou d'un ovale (...).».

[30] L. Brillouin, [1938], p.212.

[31] G. Juvet, [1922], p. 2.

[32] G. Juvet, [1922], p. 38.

[33] H. Lang,[1920].

> Der symmetrische Tensor 2. Ranges *im euklidischen Raum von drei Dimension*, für den der Deformationstensor oder der Spannungstensor einfache Beispiele aus der Mechanik der Kontinua sind, läßt sich bakanntlich geometrisch darstellen durch eine Mittelpunktsfläche 2. Ordnung, deren Mittelpunkt in eben jenem Punkt liegt, für den der Tensor gegeben ist. (...)[34]

Sa démarche consiste à trouver une représentation géométrique possible d'un vecteur dans un espace de Riemann. En particulier, Lang analyse un « quadrivecteur » de composantes A_1, A_2, A_3, A_4, qui est représenté géométriquement par une droite qui sort d'un point 0 de l'espace de Riemann. Grâce aux composantes du « quadrivecteur » il forme un tenseur spécial[35] $[[a^2]]$ symétrique et de deuxième ordre, dont les composantes[36]. sont $T_{ik} = A_i A_k$.

Un espace tensoriel du tenseur spécial $[[a^2]]$ est donné par l'équation :

$$A_1^2X_1^2 + A_2^2X_2^2 + A_3^2X_3^2 + A_4^2X_4^2 + 2A_1A_2X_1X_2 + 2A_1A_3X_1X_3 + \ldots = 1$$

Une telle équation, étant le carré d'une expression linéaire, peut être donnée aussi par les équations de deux surfaces planes parallèles et écartées entre elles. Orthogonalement aux deux surfaces, à partir du point 0 équidistante, passe le vecteur a.

En dérive, selon H. Lang, que la représentation géométrique du tenseur n'est pas donnée par les deux surfaces parallèles, mais plutôt par les vecteur a de longueur $\sqrt{A_1^2 + A_2^2 + A_3^2 + A_4^2}$. Ce double vecteur est formé par deux vecteurs égaux et de sens contraire.

Cette représentation du tenseur est comparable à celle de Voigt. Lang cite justement l'article *Über die Parameter der Krystallphysik und über gerichtete Größen höherer Ordunung*[1] et le livre *Lehrburch der Kristalphysik* de W.VOIGT en particulier le §70. Dans

---

[34] H. Lang, [1920], p.34. « Le tenseur symètrique de rang 2 dans l'espace euclidien à 3 dimensions, pour lequel le tenseur des déformations ou des tensions fournissent des exemples simples tirés de la Mécanique des continus. Il peut être représenté géométricament, c'est bien connu par un "Mittelpunktsfläche"de 2. ordre dont le point cenral se situe précisement en ce point pour lequel le tenseur est donné ».

[35] Les parenthéses [[ ]] indiquent le produit extérieur des composantes du quadrivecteur.

[36] H. Lang, [1920], p.39. Il donne aussi ce tenseur en utilisant les composantes covariantes, celle contravariantes ou mixtes du quadrivecteur.

ces pages Voigt donne, comme nous l'avons rappelé plus haut, la représentation d'une dilatation grâce à un vecteur double dans le cas à trois dimensions.

En réalité ce type de représentation pour un tenseur symétrique de deuxième ordre devait avoir été déjà employée. On pourrait même se demander si cette façon d'envisager le tenseur n'était pas récurrent dans ces années.

Dans les *Annalen der Physik* de 1919, on trouve un article de H. Kafka[37] *Zur vierdimensionalen Tensoranalysis* dans lequel le tenseur est effectivement donné par une « äußere Multipliation » (bezeichnung nach Einstein bzw. Grassmann)[38] de deux quadri-vecteurs. Un tenseur peut être représenté par une surface à quatre dimensions de second ordre. Mais, selon Kafka, «Diese geometrische Deutung ist aber in der allgemeinen Tensoranalysis ziemlich unwesentlich. »[39] Il pourrait être intéressant de vérifier si effectivement ce type de représentation était utilisé fréquemment et surtout dans le domaine de la relativité, ou si ces deux exemples restent de cas singuliers dans l'évolution du concept de tenseur.

LA SYMETRIE COMME MOYEN POUR OBTENIR UNE REPRESENTATION GEOMETRIQUE

Une autre piste de recherche, pour la représentation du tenseur, pourrait être donnée par des hypothèses simplificatrices du concept analysé. Ces hypothèses se retrouvent dans les symétries qui caractérisent les différents grandeurs et les phénomènes que ce mêmes grandeurs représentent. Symétries qui peuvent être au niveau d'indices, donc dans le domaine du numérique, ou encore symétries géométriques.

Dans cette optique, un texte digne d'intérêt est celui de Bruno Finzi, *Meccanica Razionale*[40]. Les définitions de Finzi, de par leur limpidité, donnent une idée immédiate de l'objet tenseur. Il définit la grandeur « tensore » comme « un opportuno insieme di direzioni orientate ». Ce que « opportuno » signifie n'est défini que dans le troisième chapitre où Finzi introduit « il calcolo tensoriale ».

Notre entité est représentée, dans un repère cartésien, au moyen de trois vecteurs T_1, T_2, T_3, qui sont eux aussi donnés par leurs composantes cartésiennes T_{11}, T_{12}, T_{13}, T_{22},...indiquées, d'une façon synthétique, par T_{ik} (i, k=1, 2, 3).

Une représentation possible du tenseur s'ébauche en analysant le tenseur fondamental sur base des trois « versori » des axes cartésiens. En indiquant les vecteurs unités avec i, j, k, synthétiquement a_i, et les axes selon lesquels ils sont dirigés x, y, z, synthétiquement x^i; alors les 9 composantes a_{ik} de ces trois vecteurs sont données par :

$$\mathbf{a}_{ik} = \mathbf{a}_i x \mathbf{a}_k = \begin{cases} 0 \quad pour \quad i \neq k \\ 1 \quad pour \quad i = k \end{cases} \qquad (\mathrm{i,k} = 1,2,3)$$

et résumés dans le cadre suivant: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

[37] H.Kafka, [1919].
[38] H. Kafka, [1919], p. 3.
[39] H. Kafka, [1919], p. 4.
[40] B. Finzi, [1988], p. 69.

En changeant le repère, Finzi trouve que les « versori » changent en respectant la formule $\overline{\mathbf{T}_{\mathrm{i}}} = \sum_{1}^{3} {}_{\mathrm{k}}\mathbf{T}_{\mathrm{k}}\, a_{\mathrm{i}}^{\mathrm{k}}$ donc ces derniers constituent bien un tenseur.

Comment cette idée est-elle reliée à celle de symétrie qui avait poussé P. Curie et Voigt à entrevoir la nécessité d'une nouvelle grandeur ?

Cette représentation du tenseur fondamental est spécifique et non généralisable, mais elle permet de donner une idée intuitive utile pour comprendre ce concept trop abstrait. Peut-on considérer celle-ci comme une représentation géométrique du tenseur ?

Ce style de raisonnement peut être rapporté à des domaines bien précis, comme par exemple celui de la théorie de l'élasticité. En effet, en analysant les différentes sollicitations auxquelles un corps peut être assujetti on peut, en passant du général au particulier, simplifier d'une façon considérable le tenseur des efforts. Le cas limite est celui de la pression dans un fluide. On sait que dans un tel corps les efforts tangentiels s'annulent, pour n'importe quelle orientation de l'élément de surface du corps, tracé au milieu d'un fluide au repos, la force s'exerçant au travers de cet élément de surface *dS* est toujours normale.

Alors le tenseur est caractérisé par une seule composante indépendante.

L. Brillouin[41] l'appelle un cas de *dégénérescence*. En effet le tenseur est caractérisé simplement par un scalaire, comme dans le cas précédent, présenté par Finzi.

En conclusion, vu la complexité et la variété des tenseurs existants il apparaît très difficile d'en donner une représentation complètement adéquate sans simplifier fortement le concept analysé et lui faire perdre sa richesse. Les propriétés de symétries peuvent jouer un rôle déterminant pour la compréhension du concept même de tenseur, comme effectivement ça a déjà été le cas dans le passé .

Indépendamment de la question de la véracité, la tentative de donner une idée intuitive du concept conserve beaucoup d'intérêt comme dans l'exemple fourni par Voigt.

Par rapport au thème du séminaire « La pensée numérique » cet exemple s'inscrit parfaitement dans la cadre d'un calcul basé presque exclusivement sur ses propriétés algébriques et non sur une éventuelle représentation géométrique.

Sans doute parce que, une fois que la représentation géométrique perd son caractère immédiat de simplification du concept analysé, elle perd en même temps une partie de son intérêt.

On peut conclure que les tenseurs sont de nature essentiellement algébrique et c'est donc cette intuition algébrique qu'il faut développer.

BIBLIOGRAPHIE

Benvenuto, E., *La scienza delle costruzioni e il suo sviluppo storico*, Sansoni, Firenze, 1981.

Brillouin, L., *Les tenseurs en Mécanique et en élasticité*, Masson, Paris, 1938.

Cauchy, A.L., "Recherches sur l'équilibre et le mouvement intérieur des corps solides ou fluides, élastiques ou non-élastiques", *Bulletin des sciences par la Société Philomatique de Paris*, 1823, pp. 9-13. Repris dans *Œuvres Complètes*, Série II, Tome II, Paris, GauthierVillars, pp. 300-304.

Cauchy, A.L., "De la pression ou tension dans un corps solide", *Exercices de Mathématiques*, 2, pp. 42-56, 1827.

Curie, P., "Sur la symétrie dans les phénomènes physiques", *Journal de Physique*, t. III, pp. 393-415, 1894.

Finzi, B., *Meccanica Razionale, volume primo, terza edizione*, Zanichelli, Bologna, 1988.

[41] L. Brillouin, [1938], p. 14.

Juvet, G., *Introduction au Calcul tensoriel*, Blanchard, Paris, images par M. W. Grossmann, 1922.
Kafka, H., "Zur vierdimensionalen Tensoranalysis", *Annalen der Physik*, Bd. 58, vierte folge, Leipzig, 1919.
Lamé, G. et CLAPEYRON, E., "Mémoire sur l'équilibre des corps solides homogènes", *Mém. présentés par divers Savans*, 4, pp. 486-508, 1833.
Lamé, G., *Leçons sur la théorie mathématique de l'élastcité des corps solides*, Paris, 1852, 5ème Leçon.
Lang, H., "Zur Tensorgeometrie in der allgemainen Relativitätstheorie", *Annalen der Physik*, Bd. 61, Leipzig, 1920.
Lichnérowicz, A., *Eléments de calcul tensoriel*, (7° ed.), Librairie Armand Colin, Paris-V^{e}, 1964.
Love, A.E.H., *A treatise on the Mathematical theory of Elasticity*, New York, Dover publications, 1927 [IV éd.; 1892, 1893I éd.].
Reich, K., *Die Entwicklung des Tensorkalküls, Vom absoluten Differentialkalkül zur Relativitästheorie*, Birkhäuser Verlag, Basel-Boston-Berlin, 1994.
Ricci, G., Levi-Civita, T., "Méthodes de calcul différentiel absolu et leurs applications", *Mathematische Annalen*, 54, pp. 125-201, 1901.
Sella, A., *Fisica cristallografica, le proprietà fisiche fondamentali dei cristalli*, Hoepli, 1904.
Todhunter, I. et Pearson, K., *A History of the Theory of Elasticity and of Strength of Materials*, 2, Cambridge, 1893.
Truesdell, C., *Essays in the History of Mechanics*, § IV. The creation and unfolding of the Concept of Stress, pp. 184-238, Springer-Verlag, Berlin, 1968.
Voigt, W., *Die fundamentalen physicalischen Eigenschaften der Krystalle in elementarer Darstellung*, Leipzig, 1898.
Voigt, W., *L'état actuel de nos connaissances sur l'élasticité des cristaux*, Rapport présenté au Congres International de Physique, réuni à Paris en 1900, sous les auspices de la Société française de Physique, Paris, Gauthier-Villars, 1900.
Voigt, W., *Elementare Mechanik*, Leipzig, p. 10ff., Leipzig, zweite, umgearbeitete Auflage, [I édition, 1889], 1901[a].
Voigt W., *Über die Parameter der Krystallphysik und über gerichtete Grössen höhere Ordnung*, « Annalen der Physik », band 5, Sechstes Heft, Leipzig, 1901[b]. (in küzzer Form in den Nachr. v. d. Kgl. Gesellsch., 1900, Hef 4, veröffentlich)
Voigt, W., *Etwas über Tensoranalyis*, «Nachrichten von der Königl. Gessellschaft der Wissenshaften zu Göttingen » Mathematisch-physikalische Klasse, pp.495-513, Göttingen, 1904.
Voigt, W., *Lehrburch der Kristalphysik*, Teubner, Leipzig und Berlin, 1910, cfr. édition du 1928.