LE NOMBRE ENTIER ENTRE SYNTAXE ET SEMANTIQUE

Jean-Louis GARDIES

J'essaierai d'éclairer d'emblée les deux termes, selon les goûts, techniques ou prétentieux, dont le souci de faire bref encombre mon titre. *Syntaxe* vient du verbe grec qui désigne l'action de *disposer* ou de *composer ensemble*; *sémantique* vient du verbe grec *marquer d'un signe* ou *signifier*.

L'originalité de la conception grecque des mathématiques, dont nous avons hérité, tient beaucoup à ce qu'elles se présentent sous une forme proprement *syntaxique.* On y dispose d'abord les propositions admises comme indémontrables, qu'elles soient considérées comme évidences ou comme conventions; on y introduit aussi des définitions, dont il faudra la plupart du temps admettre qu'elles-mêmes renvoient en fin de compte à leur tour à des termes premiers indéfinis. Si la construction syntaxique est réussie, c'est que les inférences qui y ont présidé sont parfaitement légitimes, assurant que l'ensemble n'est ni moins ni plus vrai que les assises sur lesquelles nous avons appuyé ses fondations. Comme chacun sait, cet ensemble resterait tout aussi cohérent et les conditions de sa vérité resteraient aussi peu discutables si nous remplacions certains des termes premiers indéfinis dont il eût été difficile que nous nous passions, par des chaises, des tables ou des chopes de bière, pour reprendre la boutade de Hilbert.

Peut-être faut-il attribuer cette relative primauté logique habituellement reconnue à la syntaxe sur la sémantique dans nos disciplines déductives à une certaine prédominance du modèle de la géométrie, dont on comprendra peu à peu que notre obligation de postuler les ultimes fondements tient moins à quelque immédiate évidence qu'à leur nature logiquement arbitraire.

Bien que les ultimes fondements qui sont à la base de l'arithmétique soient évidemment beaucoup moins arbitraires que ceux de la géométrie, il semble néanmoins, si l'on observe les livres proprement arithmétiques des *Éléments* d'Euclide, que, chez l'auteur grec, la science des propriétés du nombre entier se soit elle-même élaborée sur ce même mode qu'on dit aujourd'hui *hypothético-déductif*.

À cet égard j'avais déjà fait observer, dans une étude précédente [1], que l'axiomatique sur laquelle s'appuyait l'arithmétique euclidienne était elle-même d'une amplitude moindre que celle sur laquelle devait s'appuyer la géométrie. J'avais essayé de montrer d'abord que les recours, que des commentateurs avaient cru pouvoir déceler, dans les livres arithmétiques des *Éléments* (VII, VIII et IX), à certains résultats obtenus dans les livres antérieurs, en particulier dans le livre II et le livre V, n'étaient nullement fondés et que ces livres arithmétiques ne faisaient non plus aucun appel à ce que l'auteur euclidien avait caractérisé comme ses *postulats*. Mon étude aboutissait à cette conclusion que l'axiomatique de l'arithmétique euclidienne reposait essentiellement sur les trois premières *notions communes* (communes à l'arithmétique et à la géométrie) placées en tête des

[1] « Sur l'axiomatique de l'arithmétique euclidienne », in *Oriens-Occidens,* Cahiers du Centre d'Histoire des Sciences et des Philosophies Arabes et Médiévales, n° 2, Paris, 1998, pp. 125-140.

Éléments d'une part, et d'autre part sur les *définitions* proprement arithmétiques, placées de ce fait en tête du premier des livres arithmétiques.

Or les trois premières *notions communes* énonçaient les propriétés majeures de la relation d'*égalité*, englobant dans cette notion deux choses qu'on ne distinguera que beaucoup plus tard, à savoir d'une part la *congruence*, plus exactement encore les diverses formes de *congruence*, que le géomètre doit effectivement postuler, et d'autre part l'*identité*, à laquelle peut se réduire l'égalité arithmétique, et dont nous serons amenés à voir qu'on peut, d'une certaine manière, l'exprimer logiquement.

Quant aux définitions placées en tête du livre VII, je me contenterai de rappeler ici les conclusions auxquelles j'étais précédemment arrivé, à savoir que la plupart d'entre elles peuvent être considérées comme de remarquables définitions nominales, permettant notamment d'obtenir la *soustraction*, la *multiplication*, la *division*, les notions de *partie* ou de *multiple*, à partir de la seule *addition*. En revanche, cette notion d'*addition* n'était elle-même ni définie ni explicitement postulée, bien qu'elle fût déjà impliquée dans les deux premières prétendues *définitions*, celle d'*unité* et celle de *nombre* (« multitude composée d'unités »), qui cette fois n'avaient nullement le caractère de *définitions* au sens moderne de ce mot.

Bref mon étude soulignait que la démarche des livres arithmétiques d'Euclide, tout aussi syntaxique dans son cheminement que celle des livres géométriques, qu'elle imitait en quelque sorte, reposait dans ses derniers fondements ou, si l'on préfère, dans ses premiers principes, sur une admission assez aveugle de ce qu'étaient le nombre en général et les différents nombres en particulier, dont Platon avait déjà montré quelles difficultés soulevait leur intégration à la logique du discours ordinaire.

Frege lui-même a attiré l'attention sur le passage de l'*Hippias majeur*[2], où Socrate fait valoir à son interlocuteur que les nombres semblent enfreindre les principes les plus élémentaires de la logique inhérente à nos langues vernaculaires : toi Hippias et moi Socrate, chacun de nous est un ; et pourtant on dira que, toi et moi, nous sommes deux, alors que ni toi ni moi ne le sommes ; comment un caractère étranger à chacun d'entre nous peut-il ainsi nous être commun ? et comment ce qui ne s'applique en rien à notre communauté, de toi à moi, peut-il se retrouver à la fois chez toi et chez moi ? pourquoi la dualité, et plus généralement le nombre, échappent-ils aux règles syntaxiques auxquelles n'échappent ni la beauté, ni la santé, ni la vieillesse, ni la justice, ni la noblesse, ni la science, ni la plupart de nos habituels prédicats ?

Quel que soit mon respect pour Kant, je me sens obligé de dire que son recours à la notion de *jugement synthétique a priori* ne nous explique en rien ce que *veut dire* déjà que *un plus un fassent deux*. Car enfin l'évidence d'une telle proposition ne s'impose qu'à la double condition :

1) qu'elle *veuille dire* quelque chose (ce qui nous renvoie à la *sémantique*) ;

2) que ce qu'elle veut dire soit, en fin de compte, de quelque manière, tautologique.

Ceci, à la fin du XIXe siècle, Cantor et Frege, chacun de leur côté, l'ont compris et, chacun à leur manière, exprimé. Mais je ne saurais donner meilleur résumé de l'essentiel de leur analyse du concept de nombre qu'en reproduisant celui qu'en ont proposé les plus brillants de leurs commentateurs sur ce point ; d'autant que, ce faisant, ils retrouvaient (consciemment ou à leur insu) les propos et les accents qui avaient été ceux-là mêmes de Platon[3] :

> Un nombre n'est pas un objet au sens propre mais une propriété. Les objets, dont un nombre est la propriété, ne peuvent pas être les objets dénombrés eux-mêmes, puisque chacun de ces objets n'est qu'un, en sorte qu'on ne pourrait ensuite absolument pas obtenir un nombre différent de un. En

---

[2] 300 a-302 b.

[3] David Hilbert und Wilhelm Ackermann, *Grundzüge der theoretischen Logik*, 5. Auflage, Berlin-Heidelberg-New York, Springer, 1967, p. 150 et s. La suite de notre exposé reprend pour l'essentiel le contenu de ce texte magistralement simple.

> revanche, le nombre se laisse interpréter comme une propriété du concept sous lequel on réunit les individus dénombrés. Ainsi, continuent Hilbert et Ackermann, le fait, par exemple, qu'il y ait cinq parties du monde ne signifie certes pas que chaque partie du monde soit cinq ; mais bien que c'est une propriété du prédicat « être une partie du monde », de convenir à exactement cinq objets.

Pour comprendre ce que signifie que *un plus un fassent deux*, il faut d'abord nous entendre sur ce que signifient respectivement les termes *un* et *deux*. J'observe que je viens d'utiliser à deux reprises le verbe *signifier* ; nous sommes en effet dans la sémantique.

Que tel *concept* ou *prédicat*, que je désignerai par P, ait donc la propriété *un* (ou, si l'on préfère, le cardinal *un*) signifie non seulement qu'il existe au moins un objet *x* tel que Px, mais aussi qu'il n'existe pas d'*autre* objet *y* tel que Py, définition que je peux représenter de la manière suivante :

$$1\,(P) \underset{df}{=} \exists\, x\,[Px \,\&\, \forall\, y\,(Py \Rightarrow x \text{ est identique à } y)]$$

Ceci fait apparaître immédiatement que notre intelligence de ce qu'est le nombre 1 présuppose que nous sachions ce que signifie l'*identité*. Si l'on s'accorde sur la définition de celle-ci, dont on fait quelquefois remonter l'origine jusqu'à Leibniz.

$$a \text{ est identique à } b \underset{df}{=} \forall\, Q\,(Qa \Rightarrow Qb),$$

Q étant un prédicat d'individu quelconque, on pourra ainsi considérer qu'on aura réduit la signification de ce que nous entendons par le nombre 1 à un *definiens* qui appelle deux remarques :

1) ce *definiens* s'exprime intégralement en termes logiques : à la différence de ce qui se passe en géométrie, où Hilbert lui-même a montré qu'on devait introduire des *termes premiers indéfinis* proprement géométriques, comme *est un point*, *est une droite*, *est entre… et…*, etc., avant même d'ajouter au système les axiomes sans lesquels on ne pourrait obtenir aucune des propriétés géométriques fondamentales, la définition du nombre 1, comme celle des nombres suivants, s'obtient à partir d'un vocabulaire lui-même strictement logique, en l'occurrence conjonction, implication et quantification existentielle ou universelle ;

2) l'expression du nombre 1 déjà déborde en revanche le vocabulaire de ce qu'on appelle en logique le *premier ordre*. Zéro est le seul nombre entier qui puisse se dire sans sortir de celui-ci :

$$0\,(P) \underset{df}{=} \sim \exists\, x\, Px\,;$$

l'expression logique de tous les autres entiers suppose, par son indispensable recours à l'identité, qu'on puisse y quantifier non seulement des variables d'individu (*x* ou *y* dans notre exemple), mais aussi des variables de prédicat (*Q* dans notre exemple).

Ainsi les propositions de l'arithmétique élémentaire ont, relativement à celles de la géométrie élémentaire, l'avantage de pouvoir s'exprimer intégralement en termes proprement logiques et l'inconvénient de devoir recourir à une logique qui dépasse le premier ordre.

Sans avoir besoin de reprendre l'exemple kantien de 7 + 5 = 12, il nous suffira de l'exemple, proposé par le manuel de Hilbert et Ackermann, de 1 + 1 = 2 qu'on pourra transcrire dans une première phase :

$$\forall\, P\, \forall\, Q\, \{[P \text{ et } Q \text{ sont incompatibles} \,\&\, 1\,(P) \,\&\, 1\,(Q)] \\ \Rightarrow 2\,(P \vee Q)\}.$$

Le premier terme de la conjonction constitutive de l'antécédent d'une telle implication pourra plus explicitement s'écrire encore :

$$\forall x \sim (Px \,\&\, Qx)$$

le deuxième terme de cette conjonction se traduira :

$$\exists x\, [Px \,\&\, \forall y\, (Py \Rightarrow x \text{ identique à } y)]$$

forme qu'on retrouvera pour le troisième terme, la variable de prédicat Q y remplaçant la variable P ; tandis que le conséquent de notre implication pourra s'analyser de la façon suivante :

$$\exists x\, \exists y\, \{\{ (Px \vee Qx) \,\&\, (Py \vee Qy) \,\&\, \sim (x \text{ identique à } y)$$
$$\&\, \forall z\, \{(Pz \vee Qz) \Rightarrow (x \text{ identique à } z \text{ ou } y \text{ identique à } z)\}\}\}$$

c'est-à-dire qu'il y a au moins et au plus deux termes dont chacun ait la propriété P ou la propriété Q.

Une telle analyse confirme que 1 + 1 = 2 et, tout aussi bien, 7 + 5 = 12 sont, comme disent Hilbert et Ackermann « des propositions démontrables de façon purement logique » (« rein logisch beweisbare Sätze »), à la condition bien sûr d'envisager une logique qui inclue une quantification des prédicats, qu'on retrouve ici non seulement en tête de l'expression, mais que présupposait, nous l'avons vu, le recours à l'identité.

Tel est ce que la proposition 1 + 1 = 2 (ou 7 + 5 = 12) *veut dire*. Tel est, si l'on préfère, son fondement *sémantique*. Peut-être sera-t-on tenté de nous faire observer que, pour l'explication de ce fondement sémantique, nous avons été amenés à recourir à telle forme de *calcul des prédicats* et que toute forme d'un tel calcul ne peut elle-même se fonder syntaxiquement que sur des axiomes, c'est-à-dire sur des propositions qui de leur côté ne seront pas démontrées dans le système.

Qu'on relise déjà la *Begriffsschrift* ! Bien sûr, Frege y introduit à la base de son système des axiomes, dont il déduira les autres théorèmes, comme feront d'ailleurs les auteurs des *Principia mathematica* et tous les suivants. Il est en effet caractéristique de Frege qu'il revendique, aussi bien pour l'arithmétique que pour la géométrie, la procédure axiomatique héritée de la tradition grecque.

Ceci a même des conséquences assez dramatiques pour la conception frégéenne de la géométrie. Car enfin, comme Frege a posé en principe qu'on ne peut déduire le vrai que du vrai, il est amené à penser que les axiomes, dont il sait qu'on est obligé de les admettre sans démonstration à la base de la géométrie euclidienne, sont vrais d'une vérité absolue, sans laquelle toute la validité de cette géométrie s'effondrerait. Hilbert, dans sa correspondance avec lui, n'arrivera jamais à lui faire reconnaître le caractère que nous appelons aujourd'hui *hypothético-déductif* de cette géométrie euclidienne, à une époque pourtant où les géométries non-euclidiennes ont déjà pignon sur rue.

Fidèle à la tradition syntaxique propre à la géométrie grecque, Frege fonde aussi la version du *calcul des prédicats* qu'il donne dans sa *Begriffsschrift* sur une série d'axiomes, dont il importe peu ici que Lukasiewicz ait montré plus tard que tel d'entre eux pouvait se déduire des autres. Ce qui importe c'est que leur statut d'axiome les impose comme *indémontrés* : indémontrés non pas, dans l'esprit de Frege, parce qu'arbitraires, mais parce que d'une vérité immédiatement admise.

Il n'en reste pas moins que Frege accompagne déjà la présentation syntaxique de ses axiomes de considérations proprement sémantiques, dans lesquelles on peut trouver le premier germe de la notion de tautologie, que ni lui-même ni Russell ne sauront pleinement reconnaître, et qu'introduira seulement le *Tractatus logico-philosophicus*. Grâce à Wittgenstein on comprendra que les théories logiques, à commencer bien sûr par le *calcul* *des propositions*, peuvent se fonder *sémantiquement* au lieu de se fonder sur un ensemble de règles et d'axiomes, c'est-à-dire *syntaxiquement*. Chacun sait que cette distinction fondamentale permettra d'introduire des notions comme celle de *complétude*, un système syntaxique étant dit *complet* si l'on peut y déduire (c'est-à-dire y déduire *syntaxiquement*) toutes les propositions valides (c'est-à-dire *sémantiquement* valides).

Les successeurs de Frege et de Russell conféreront au double jeu de la syntaxe et de la sémantique un caractère systématique. Un système logique ne sera pris au sérieux que si l'on réussit à proposer parallèlement, d'une part l'ensemble d'axiomes et de règles à partir duquel le reste se déduit syntaxiquement, d'autre part l'ensemble de caractérisations sémantiques qui permettrait d'établir sur le principe de contradiction déjà la validité de ces axiomes et de ces règles et assurerait la transmission d'une telle validité à toutes les propositions qui syntaxiquement s'en déduisent.

Je suis moi-même assez vieux pour avoir connu une époque où les *logiques* dites *modales* n'étaient guère prises au sérieux pour l'excellente raison qu'elles n'étaient fondées que syntaxiquement, c'est-à-dire sur des axiomatiques auxquelles on ne savait faire correspondre aucune sémantique. Cette situation n'a cessé que dans les années soixante, quand des logiciens comme Kripke ou Hintikka ont su imaginer des sémantiques correspondant aux différentes axiomatiques modales et y définissant des *validités* : formes sophistiquées de ce qu'avait été en son temps la simple *table de vérité* du *calcul des propositions*.

Cette exigence d'un fonctionnement parallèle de la syntaxe et de la sémantique, tel qu'il s'est instauré dans la tradition logico-mathématique, a des raisons essentielles et des raisons accidentelles.

J'ai déjà souligné, au début de cet exposé, que l'élaboration du modèle proprement syntaxique de la géométrie, du *mos geometricus* tel qu'il s'est érigé en paradigme de la démarche déductive, tenait manifestement au fait, dont on ne prendra qu'au XIXe siècle une conscience totalement explicite, que la géométrie dite aujourd'hui *euclidienne* repose sur quelques bases initiales qui sont logiquement arbitraires. Pour cette raison, une présentation sémantique de la géométrie était exclue. Curieusement c'est cette sorte d'infirmité logique propre à cette discipline, qui, en la contraignant à s'organiser de la seule manière dont elle pût s'accommoder, à savoir syntaxiquement, lui a permis d'accéder dans cet ordre à ce degré de perfection qui devait ensuite dangereusement fasciner mathématiciens et même logiciens, et faire considérer la syntaxe comme une voie royale. Il faut donc bien comprendre que le privilège reconnu à la procédure syntaxique tient, pour une part au moins, à ce que celle-ci était la seule accessible aux systèmes hypothético-déductifs.

Mais ce que je viens de dire ne signifie pas qu'une discipline comme l'arithmétique élémentaire, à plus forte raison les théories proprement logiques, eussent pu, plus avantageusement, s'établir par des voies strictement sémantiques et qu'on eût mieux fait de renoncer pour elles à des voies syntaxiques que, dans leur cas, rien n'obligeait d'emprunter ; ce à la différence de la discipline géométrique, laquelle n'aurait pas mérité à cet égard d'être leur modèle.

Tenir de tels propos serait méconnaître les allégements considérables que permet souvent le passage à une procédure syntaxique, relativement à la procédure sémantique correspondante. L'évocation à laquelle j'ai ici moi-même procédé, de la possibilité sémantique d'établir que 1 + 1 = 2, laisse pressentir qu'il doit généralement y avoir des moyens syntaxiques plus rapides d'accéder à de telles vérités élémentaires que ces moyens sémantiques qui en constituent pourtant les fondements derniers ; d'autant que ce que je viens de dire de 1 + 1 = 2, montre que l'évidence, avec laquelle une telle proposition s'impose quasi immédiatement à chacun, ne signifie absolument pas que nous soyons explicitement conscients de tous les fondements sémantiques de cette évidence.

Disons qu'il est donc assez normal qu'un auteur comme Frege, égaré d'ailleurs par son refus de mettre en cause l'évidence de la géométrie euclidienne et, après lui encore, Whitehead et Russell, qui ne partageaient pourtant pas le même égarement, aient repris la tradition hypothético-déductive en traitant comme axiomes des thèses qui, heureusement pour eux, eussent été sémantiquement justifiables, et en élaborant une procédure de déduction syntaxique, elle-même heureusement sémantiquement justifiable, qui fournissait une méthode plus légère pour obtenir les autres théorèmes, sans avoir à les ramener chaque fois jusqu'à leur dernier fondement sémantique.

Nous avons vu que les livres proprement arithmétiques d'Euclide avaient été eux-mêmes élaborés sur le mode hypothético-déductif. Sur une axiomatique dont on peut féliciter l'auteur de ces livres de l'avoir réduite à ce qu'il pouvait considérer comme un minimum, celui-ci a élaboré la suite de ses résultats. Sa procédure reste hypothético-déductive, mais à un moindre degré que celle des livres de contenu géométrique ; et nous avons vu que ce moindre degré tenait d'abord à la nature respective de l'objet de l'arithmétique et de celui de la géométrie.

De toute façon, lors même qu'on aura reconnu l'autonomie de la voie sémantique relativement à la voie syntaxique, bien que la première puisse seule donner l'équivalent d'une description phénoménologique qui garantisse en dernier lieu la vérité du système, la voie proprement syntaxique conservera l'avantage *pragmatique* de nous dispenser de faire chaque fois une analyse exhaustive de tous les présupposés sémantiques du théorème envisagé. Elle pourra en quelque sorte nous fournir des raccourcis.

Nos analyses précédentes montrent pourquoi, face aux considérations sémantiques qui seules, en dernier ressort, garantissent les vérités les plus élémentaires de l'arithmétique, quelque fondamentales qu'elles soient et quelque immédiat que nous paraisse notre accès à ce qu'elles énoncent, le souci d'un minimum de confort intellectuel, nous incite à nous réfugier, soit, paresseusement, dans ce que nous percevrons comme des évidences, soit, modestement, dans ce que nous envisagerons comme de simples axiomes.

Un tel refuge dans une procédure axiomatique présente l'avantage que celle-ci oblige à déterminer précisément les propositions à partir desquelles on pourra construire les autres. Si de tels axiomes pouvaient eux-mêmes se démontrer sur une base proprement logique, c'est-à-dire sur la base d'une logique elle-même sémantiquement fondée, il semble qu'on pourrait alors considérer l'arithmétique comme ainsi, au moins indirectement, ramenée jusqu'à ses fondements sémantiques. En pareil cas le recours à des systèmes hypothético-déductifs ne comporterait, sémantiquement même, que des avantages, puisqu'il allégerait le développement des démonstrations de ces lourdes considérations sémantiques, dont il fournirait une sorte d'équivalent abrégé, sans diminuer, en quoi que ce soit, la validité des résultats.

N'oublions pas en effet que la force théorique d'une analyse sémantique est de nous obliger à embrasser l'ensemble des rapports de vérité impliqués dans la proposition ; sa faiblesse pratique est de ne rien nous épargner de ce foisonnement de considérations vérifonctionnelles, qui en fondent la validité.

Dans le *calcul des prédicats* du premier ordre, un tel passage de la sémantique à la syntaxe est envisageable en toute sécurité, depuis que sont démontrées et sa *santé* ou *solidité* (*soundness*) qui nous assure que les conclusions que nous obtiendrons par la voie syntaxique resteront sémantiquement valides, et sa *complétude*, qui nous garantit de surcroît qu'aucune proposition sémantiquement valide n'est inaccessible par cette voie.

Au surplus, indépendamment même de ce *calcul des prédicats* du premier ordre pris dans ses limites, il n'est pas contestable [4] que les axiomes que Peano a proposé de mettre à la base de l'arithmétique soient démontrables dans la logique de Frege, dont nous avons vu qu'elle-même pouvait être sémantiquement fondée.

Jusqu'ici donc tout irait bien. Mais c'est à ce niveau qu'on rencontre le célèbre résultat, auquel est attaché le nom de Gödel, et suivant lequel il existe des formules vraies dans l'interprétation naturelle de l'arithmétique, qui pour autant ne sont pas démontrables sur la

---

[4]. Je me contente de renvoyer ici à *Logique et philosophie chez Frege* de Jean Largeault, Paris-Louvain, Nauwelaerts, 1970, p. 322 et s., où l'on peut trouver une présentation d'ensemble dégagée de l'écriture propre à Frege.

base constituée par l'adjonction des axiomes de Peano à ceux d'un système complet du *calcul des prédicats* du premier ordre.

Pourquoi d'abord s'arrêter ici à ce « *calcul des prédicats* du premier ordre » ? Les auteurs grecs de la géométrie euclidienne, pour commencer par eux, n'avaient pas hérité de connaissances logiques suffisantes pour procéder à une analyse logique complète de leurs propres démonstrations, quelque remarquables qu'aient été déjà en eux-mêmes les apports des Mégariques touchant les connecteurs propositionnels et ceux de la tradition aristotélicienne touchant la quantification. De toute façon, l'univers de leur discours scientifique, lequel, je le rappelle, ne sort jamais des limites de leur langue vernaculaire, participe, déjà de ce que Hasenjaeger[5] a appelé l'« image du monde de l'ontologie discrète », c'est-à-dire, je le cite :

> L'univers des objets, concrets ou abstraits, consiste en objets qui ont telles propriétés et qui n'ont pas telles autres, qui ont entre eux telles relations et non telles autres.

étant bien entendu que c'est dans les limites d'une telle structure grammaticale, dont les logiciens montreront qu'elle est, et comment elle est, ouverte à la notion de validité logique, que s'inscrit le discours rationnel sur les choses.

Mais l'observation des démonstrations des auteurs grecs montre que celles-ci en outre se maintenaient pour l'essentiel dans le premier ordre, même si la nature de leur objet les obligeait à prendre en charge des prédicats et relations proprement géométriques, donc logiquement arbitraires, dont ils étaient amenés à caractériser les propriétés par voie axiomatique, et qui, néanmoins, en tant que tels, s'intégraient eux-mêmes parfaitement, sans en déborder, dans ce discours de premier ordre.

Un des traits les plus remarquables de la géométrie euclidienne tient en effet à la manière dont son auteur, au moment où il a besoin de recourir dans son propos géométrique à la nouvelle entité *raison* (*logos*), par laquelle vont s'introduire, comme les commentateurs l'ont souvent souligné, les propriétés d'un semi-groupe, réussit, par sa célèbre définition 5 du livre V, à faire correspondre à une égalité entre de telles entités *raisons*, qui, par elles-mêmes, dépasseraient le premier ordre, puisqu'elles ne seraient pas elles-mêmes des objets géométriques, un simple prédicat tétradique entre quatre objets géométriques, homogènes deux à deux[6]; introduction dont la génialité tenait précisément à ce qu'elle assurait au discours géométrique son maintien dans le premier ordre, sans le priver pour autant de cette entité *raison* elle-même, dont il eût été très difficile à ce niveau de devoir se passer.

De ce fait les géomètres grecs, y compris Archimède et Apollonius, pourront disposer de la notion de *raison*, ou plus exactement d'un équivalent de cette notion, sans que leur discours ait à sortir du premier ordre. Plus tard, d'ailleurs, dans ses *Fondements de la géométrie*, Hilbert, sans reprendre la définition euclidienne de la proportion, s'attachera du moins à déterminer le segment produit de deux segments, de manière à pouvoir définir, sans avoir à sortir du premier ordre, l'égalité des raisons de a à b et de a' à b' par celle des simples segments ab' et ba'.

Ainsi, lorsque s'élabore, par les soins de Frege et de ses successeurs, ce que nous appelons le *calcul des prédicats du premier ordre*, ceux-ci disposent déjà, avec la géométrie d'Euclide, d'un exemple concret de démonstrations correspondant à une telle théorie, d'autant qu'à cette même époque les fondements axiomatiques de cette géométrie se trouvent sérieusement éclairés.

Il est caractéristique que Hilbert, qui, au moment où il se lance dans l'élaboration de ses *Fondements de la géométrie*, n'a pas encore eu le temps de se familiariser sérieusement avec les recherches logiques que parallèlement d'autres poursuivent, pousse si loin l'analyse des objets géométriques, de leurs propriétés et relations, et des raisonnements

---

[5] G. Hasenjaeger, *Einführung in die Grundbegriffe und Probleme der modernen Logik*, 1962, chap.2, p. 30. Cité par J. Largeault, *Logique et philosophie chez Frege*, *op. cit.*, p. 210.

[6] Cf. J.L. Gardies, *L'Héritage épistémologique d'Eudoxe de Cnide*, Vrin, 1988, p. 51 et s.

auxquels ils se prêtent, que ces raisonnements, tels qu'il les reconstitue, peuvent eux-mêmes se traduire dans un *calcul des prédicats du premier ordre*. Ainsi le prestige déjà antérieurement reconnu au *mos geometricus* va, avec cette reconstruction hilbertienne de la géométrie se transmettre au *premier ordre* lui-même, support suffisant à la géométrie élémentaire, et dont la simplicité même inspire l'espoir qu'on puisse sur la même base reconstruire les autres théories déductivement présentables.

C'est ici que le résultat obtenu par Gödel nous tire de nos possibles illusions concernant l'arithmétique : non qu'il exprime un désastre de la raison, justifiant quelque nouveau mal du siècle. Sans doute, que l'expression des plus élémentaires résultats de l'arithmétique déborde déjà sémantiquement le vocabulaire du premier ordre, comme on peut facilement le constater, ne permet pas de prévoir immédiatement à coup sûr que l'addition de l'*axiomatique de Peano* à celle du *calcul des prédicats du premier ordre* ne suffira pas à démontrer toutes les propositions vraies dans l'interprétation dite *naturelle* de l'arithmétique, interprétation de ce que l'arithmétique *veut dire*, telle qu'une analyse sémantique s'efforce de l'atteindre. Encore fallait-il que quelqu'un le démontrât.

Mais il faut bien s'entendre sur la portée de cette limite une fois rencontrée. Si la réussite de certaines axiomatisations, comme celle de la géométrie élémentaire, ne recourant, implicitement ou explicitement, qu'aux moyens du *calcul des prédicats du premier ordre*, a pu faire naître des illusions sur tout ce qu'on pouvait espérer de ce genre d'axiomatisation, l'impossibilité de fonder un système syntaxique complet de l'arithmétique sur une telle base ne sonne jamais que le glas de ce genre d'illusions. En soi-même il n'y a rien de bien surprenant à ce que nous ne puissions obtenir par un système syntaxique dont les moyens logiques se limitent au premier ordre la totalité de ces résultats dont la signification déborde manifestement ce premier ordre.

On ne peut pas considérer une telle incomplétude syntaxique, c'est-à-dire cet échec d'une certaine forme de système syntaxique, dont *a priori* rien ne permettait de penser qu'il dût ou pût réussir (ni non plus, il est vrai, qu'il dût nécessairement échouer), comme un échec de la logique elle-même, à plus forte raison comme une tare inhérente à la rationalité. La reconnaissance d'une telle impossibilité ne porte aucune atteinte à la croyance, partagée déjà par de nombreux mathématiciens du XIX^{e} siècle, que le nombre est un produit, sinon de notre esprit, du moins de ce que nous appelons *raison*, à la différence de l'espace de la géométrie, dont toutes les lois ne procèdent pas de la seule raison. À la limite, l'arithmétique s'épuise dans sa sémantique, c'est-à-dire dans ce qu'elle veut dire ; elle ne dit rien d'autre que ce qu'elle veut dire ; dans ce domaine il semble que la syntaxe ait du mal à la rattraper. Au contraire nous avons vu que la géométrie n'a pas de véritable sémantique possible ; on ne peut prétendre à une totale intuition d'une évidence de la géométrie (et de quelle géométrie ?) qu'en s'aveuglant sur ses présuppositions dernières ou en les érigeant en quelque absolu.

Tous nos étonnements ont leur origine dans le fait très simple, qui ne peut émoustiller que les amateurs de paradoxes philosophiques, que la géométrie est *logiquement* beaucoup plus simple que l'arithmétique, alors que l'arithmétique est essentiellement *logique*, tandis que la géométrie ne l'est pas.