À l'origine de la notion de nombre transcendant : John Wallis et la quadrature du cercle

Marco Panza

On[1] sait que ce ne fut que très tard, à savoir en 1882, que C. L. F. Lindemann démontra la transcendance[2] de π. Lindemann ne fit pourtant qu'apporter le sceau d'une preuve rigoureuse à une conviction partagée depuis longtemps par la plus grande partie, pour ne pas dire la totalité, des mathématiciens. Le premier à affirmer, dans un langage et un contexte mathématique fort différents de ceux de Lindemann, un résultat analogue fut John Wallis, en 1656. Dans son *Arithmetica infinitorum*[3], il présenta un argument très fort pour soutenir l'hypothèse selon laquelle le carré construit sur le rayon d'un cercle donné est avec le quart de ce cercle dans un rapport qu'il est impossible d'exprimer par les moyens arithmétiques connus. J'entends reconstruire cet argument, clarifier la signification qu'il faut assigner à cette hypothèse dans la théorie des quadratures de Wallis.

* * *

L'*Arithmetica infinitorum* peut être divisée en deux parties[4]. La première partie est consacrée à la recherche d'un algorithme propre à fournir la quadrature d'une certaine classe de courbes géométriques simples, constituée par généralisation des conditions qui caractérisent une parabole ou une hyperbole[5] ; la deuxième partie vise une extension de cet algorithme propre à fournir la quadrature du cercle. Les termes “algorithme de quadrature” et “quadrature du cercle” ne doivent pas être entendus ici selon leur signification moderne. Une exposition du parcours de Wallis montrera la signification qu'il faut leur assigner.

[1] Le texte qui suit est tiré, avec de légères modifications, du deuxième chapitre de la dissertation que j'ai présentée le 14 décembre 2000 pour obtenir l'habilitation à diriger des recherches à l'EHESS de Paris. Je remercie ici Michel Blay, Jean Dhombres, Michel Fichant, Paolo Freguglia, Massimo Galuzzi, Antoni Malet et Jean Petitot pour avoir accepté de lire, discuter et juger mon travail. Lors de ma présentation orale au colloque de Peyresq, j'ai insisté sur la deuxième partie de ce texte. La discussion qui a suivi mon exposé me fut utile pour apporter des corrections à mon texte. Je tiens à remercier tous ceux qui ont pris part à cette discussion.

[2] Cf. Lindemann (1882).

[3] Cf. Wallis (1656*b*).

[4] Cf. respectivement Wallis (1656*b*), 1-84 and 84-198. Pour une analyse détaillée du texte de Wallis, cf. Scott (1938) et Panza (1995), 163-211 (dont le présent chapitre peut être considéré comme une mise à jour). Cf. aussi : Cantor (1880-1908), II, 822-827 ; Prag (1931), 387-391 ; Whiteside (1960-1962), 236-243 ; Baron (1969), 208-211.

[5] Wallis montre comment son algorithme pourrait s'appliquer à la recherche de certaines cubatures et à la détermination des rapports entre certains segments de spirale.

1 La quadrature des paraboles et des hyperboles généralisées

La plupart des interprètes ont traduit le résultat auquel Wallis parvient dans la première partie de son traité par l'égalité suivante :

$$\int_0^{\xi} ax^r dx = \frac{1}{r+1} a\xi^{r+1} \qquad [r \neq -1] \tag{1}$$

où r est un nombre réel algébrique quelconque. Même si on résistait à la tentation d'employer la notation intégrale pour énoncer un résultat obtenu dans un contexte mathématique dont autant la notion d'intégrale que le formalisme du calcul intégral étaient absents, on ne serait pas encore fidèle au texte de Wallis si l'on acceptait de présenter ce résultat comme la détermination de l'aire du trapézoïde délimité par toute courbe d'équation $y = ax^r$.

Pour Wallis il n'y a rien de similaire à une classe de courbes d'équation $y = ax^r$: non seulement Wallis ne suit pas Descartes en énonçant que chaque courbe géométrique peut être exprimée par une équation algébrique (référée à un système fixé de coordonnées cartésiennes), mais il ne semble pas non plus le suivre en définissant une opération de multiplication sur les segments, de sorte à donner sens à l'écriture x^r, r étant un exposant rationnel ou, *a fortiori*, un nombre réel algébrique quelconque.

Ensuite, Wallis ne conçoit guère le problème de la quadrature d'une courbe comme celui de la détermination d'une écriture algébrique exprimant l'aire du trapézoïde délimité par cette courbe, évalué entre l'origine et une abscisse quelconque $x = \xi$, et *a fortiori*, il est loin de le concevoir comme le problème de la détermination d'une fonction d'une limite d'intégration, exprimant l'aire d'une courbe exprimée, à son tour, par une autre fonction. Une courbe étant donnée, le problème de sa quadrature consiste, pour lui, dans la détermination du rapport entre le trapézoïde délimitée par cette courbe et un parallélogramme donné en même temps que la courbe elle-même. Si on note respectivement par "$\mathcal{T}$" et "$\mathcal{P}$" ce trapézoïde et ce parallélogramme, ceci revient à déterminer la quatrième proportionnelle ξ dans la proportion

$$\mathcal{T} : \mathcal{P} = 1 : \xi \tag{2}$$

S'il est vrai que Wallis interprète désormais une proportion comme une identité entre deux rapports[6], et que la détermination de la quatrième proportionnelle ξ revient, de ce point de vue, à la détermination d'un nombre $\frac{1}{\xi}$ exprimant le rapport $\frac{\mathcal{T}}{\mathcal{P}}$ entre le trapézoïde $\mathcal{T}$ délimité par la courbe et le parallélogramme de référence $\mathcal{P}$, il reste qu'il ne cherche pas à exprimer des aires par des expressions algébriques. Il vise la détermination d'un rapport qui indique la procédure à suivre pour construire un carré égal au trapézoïde délimité par la courbe donnée. Non seulement Wallis n'a donc pas franchi le pas qui sera franchi quelques années plus tard par Newton, et qui conduit justement à penser les problèmes de quadrature comme des problèmes visant la détermination de l'expression

[6] Wallis ne rendra explicite ce point de vue que quelques années plus tard, dans son *Algèbre* [cf Wallis (1685), ch. XIX, 78-79 et Wallis (1693), 85-93]. Ce point de vue est pourtant déjà implicite dans l'*Arithmetica infinitorum*. Pour une discussion de la conception des proportions de Wallis, cf. Gardies (1988), 129-135.

d'une aire, mais il n'a pas non plus adopté le point de vue de Descartes et il ne se sert pas de l'algèbre des segments de ce dernier.

Pour comprendre le résultat auquel Wallis parvient et l'interpréter selon son point de vue, il vaut mieux suivre son parcours, au lieu de chercher à exprimer ce résultat d'emblée par une formule générale.

Wallis cherche d'abord[7] un nombre entier positif m qui puisse fournir la quatrième proportionnelle dans la proportion

$$\mathsf{AOT} : \mathsf{ADOT} = 1 : m \tag{3}$$

où ADOT (fig.1) est un parallélogramme et la courbe AO délimitant le trapézoïde AOT — qui se réduit dans ce cas à un triangle curviligne — est telle que pour tout choix des points T_1 et T_2, les segments $\mathsf{T}_1\mathsf{O}_1$ et $\mathsf{T}_2\mathsf{O}_2$, parallèles au côté AD de ce parallélogramme, sont entre eux en une raison n-uple de la raison qu'ont entre eux les segments $\mathsf{D}_1\mathsf{O}_1$ et $\mathsf{D}_2\mathsf{O}_2$, parallèles à l'autre côté AT de ce même parallélogramme. Wallis aborde ce problème par étapes, d'abord pour $n = 1$, ensuite pour $n = 2$, *etc.* C'est seulement la constatation de l'invariance de forme qui lie entre elles les solutions obtenues pour des petites valeurs de n qui conduit Wallis à une généralisation.

Si $n = 1$[8], la courbe AO se réduit à une droite, de sorte que AOT n'est rien qu'un triangle rectiligne. Les segments $\mathsf{T}_1\mathsf{O}_1$ et $\mathsf{T}_2\mathsf{O}_2$ seront alors entre eux comme les segments $\mathsf{D}_1\mathsf{O}_1$ et $\mathsf{D}_2\mathsf{O}_2$. Dans ce cas le problème a évidemment une solution banale : $m = 2$. Ce qui est intéressant n'est pourtant pas cette solution, mais la manière par laquelle Wallis la justifie. Car une telle justification est aisément généralisable. Wallis observe que les rapports

$$\frac{0+1}{1+1} \quad ; \quad \frac{0+1+2}{2+2+2} \quad ; \frac{0+1+2+3}{3+3+3+3} \quad ; \frac{0+1+2+3+4}{4+4+4+4+4} \quad ; \ldots \tag{4}$$

sont tous égaux à $\frac{1}{2}$, ou bien, pour le dire d'une manière générale (qui n'est pas à la disposition de Wallis, faute d'une notation convenable) que, quel que soit le nombre entier strictement positif h[9],

$$\frac{\sum\limits_{i=0}^{h} i}{\sum\limits_{i=0}^{h} h} = \frac{\sum\limits_{i=0}^{h} i}{h(h+1)} = \frac{1}{2} \tag{5}$$

Il n'est pas difficile de voir comment cette égalité peut être démontrée en toute généralité et il n'y a pas de doute que Wallis aurait parfaitement pu en fournir une preuve. Il se limite à la justifier inductivement, sans doute pour adopter, dès le premier exemple, la méthode qu'il emploiera par la suite.

Or, continue Wallis, le triangle AOT et le parallélogramme ADOT peuvent être conçus respectivement, d'après la méthode des indivisibles de Cavalieri[10],

[7]Cf. Wallis (1656*b*), prop. I-L, 1-41.

[8]Cf. Wallis (1656*b*), prop. I-III, 1-3.

[9]Pour simplifier, j'emploierai dans la suite le symbole "$\sum\limits_{i=0}^{h} H$" où H est une constante (par rapport à i) pour me référer à la somme $\sum\limits_{i=0}^{h} a_i$, où on pose $a_i = H$ pour tout i entre 0 et h.

[10]Cf. Cavalieri (1653). À propos de la méthode de Cavalieri, cf., entre autres, Giusti (1980).

comme composés par une infinité de droites parallèles se comportant les unes relativement aux autres comme les termes des sommes $\sum_{i=0}^{h} i$ et $\sum_{i=0}^{h} h$ prolongées jusqu'à l'infini. Mais, le rapport de ces deux séries est égal à $\frac{1}{2}$, quel que soit h. Il doit donc, nous dit Wallis, rester égal à $\frac{1}{2}$ aussi lorsque ces sommes sont prolongées jusqu'à l'infini. Il s'ensuit que le rapport entre le triangle AOT et le parallélogramme ADOT est, lui aussi, égal à $\frac{1}{2}$.

De quelque manière qu'on envisage de le justifier, l'argument de Wallis ne porte pas sur la somme des éléments indivisibles considérés, mais sur la relation entre la modalité de variation des cordes successives d'un triangle et la modalité de variation des cordes successives d'un parallélogramme. Dans ce sens, le fait que les sommes $\sum_{i=0}^{h} i$ et $\sum_{i=0}^{h} h$, prolongées jusqu'à l'infini, se transforment en séries divergentes ne comporte aucune difficulté. Car ce dont il est question n'est pas la valeur de ces séries, mais leur rapport. On pourrait arriver à soutenir que Wallis raisonne ici, implicitement, en termes fonctionnels. C'est en fait toute la puissance de son argument. C'est cela d'ailleurs qui rend cet argument aisément généralisable, non seulement à des triangles dont deux des trois côtés sont donnés par des courbes, dont les cordes croissent en progression arithmétique, comme dans un triangle rectiligne[11], mais aussi à des triangles curvilignes délimités par deux cotés rectilignes et par une parabole généralisée de n'importe quel ordre.

Si l'on suppose que la courbe AO est une branche d'une parabole dont le point A est le sommet, alors il suffit de supposer aussi que le côté AD du parallélogramme ADOT coïncide avec le diamètre de cette parabole pour en tirer que les segments $\mathsf{T}_1\mathsf{O}_1$ et $\mathsf{T}_2\mathsf{O}_2$ sont entre eux en une raison double de la raison qu'ont entre eux les segments $\mathsf{D}_1\mathsf{O}_1$ et $\mathsf{D}_2\mathsf{O}_2$. C'est la formule choisie par Wallis pour caractériser la "demi-parabole" AO : "TO, TO, &c. [sunt] in ratione duplicata ipsarum DO, DO, &c."[12].

Dans le langage de la théorie des proportions, ceci signifie que les segments $\mathsf{T}_1\mathsf{O}_1$, $\mathsf{T}_2\mathsf{O}_2$, $\mathsf{D}_1\mathsf{O}_1$ et $\mathsf{D}_2\mathsf{O}_2$ satisfont le système de proportions

$$\begin{array}{c} \mathsf{T}_1\mathsf{O}_1 : \mathsf{T}_2\mathsf{O}_2 = \alpha : \beta \\ \mathsf{D}_1\mathsf{O}_1 : \mathsf{D}_2\mathsf{O}_2 = \alpha : \gamma = \gamma : \beta \end{array} \tag{6}$$

où α, β et γ sont des quantités quelconques, homogènes entre elles, dont une (par exemple α) est fixée arbitrairement et les deux autres sont déterminées à partir de celle ci, en tant que des quatrièmes proportionnelles convenables. Si on suppose que la première de ces quantités est le segment unité, ou même, plus simplement, si on transforme les proportions précédentes en égalités entre produits, et si on pose, pour simplicité, $\mathsf{D}_i\mathsf{O}_i = x_i$ et $\mathsf{T}_i\mathsf{O}_i = y_i$ $(i = 1, 2)$, on en tire que

$$y_1 : y_2 = ax_1^2 : ax_1^2 \tag{7}$$

où a est un coefficient constant quelconque. Il suffit d'observer que les points T_1 et T_2 sont quelconques et que, la courbe étant donnée, le choix de ces points détermine le choix des points D_1 et D_2, pour passer de là à l'équation

$$y = ax^2 \tag{8}$$

[11] Cf. Wallis (1656*b*), prop. III, 2-3.

[12] Cf. Wallis (1656*b*), prop. XXIII, 18. L'introduction des indices ne correspond pas à la notation de Wallis, qui utilise les mêmes lettres "T", "D" et "O" pour indiquer plusieurs points.

qui, dans l'algèbre des segments de Descartes, exprime bien la parabole AO par rapport à l'axe AT, tangente à la parabole à son sommet A, pris comme origine, et à l'angle $\mathsf{T\hat{A}D}$ que cet axe forme avec le diamètre de la parabole.

Bien que Wallis ne suive pas Descartes dans cette simplification de l'expression de la loi qui caractérise une parabole quelconque, il comprend qu'une parabole se caractérise, par rapport à toute autre courbe, par une relation intime avec la puissance 2. Pour déterminer la valeur de m lorsque la courbe AO est une parabole, il se réclame en effet des sommes $\sum\limits_{i=0}^{h} i^2$ et $\sum\limits_{i=0}^{h} h^2$. Il observe que[13], quel que soit h,

$$\frac{\sum\limits_{i=0}^{h} i^2}{\sum\limits_{i=0}^{h} h^2} = \frac{\sum\limits_{i=0}^{h} i^2}{h^2(h+1)} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6h} \tag{9}$$

Si les sommes $\sum\limits_{i=0}^{h} i^2$ et $\sum\limits_{i=0}^{h} h^2$ sont donc prolongées à l'infini, leur rapport devient égal à $\frac{1}{3}$. En symboles, cela peut s'écrire ainsi

$$\left[\frac{\sum\limits_{i=0}^{h} i^2}{\sum\limits_{i=0}^{h} h^2}\right]_{h=\omega} = \left[\frac{\sum\limits_{i=0}^{h} i^2}{h^2(h+1)}\right]_{h=\omega} = \frac{1}{3} \tag{10}$$

où ω est un nombre infini[14]. De là Wallis tire que si la courbe AO est une branche de parabole, alors le rapport entre le triangle curviligne AOT et le parallélogramme ADOT est, lui aussi, égal à $\frac{1}{3}$. On aura alors $m = 3$.

La même procédure s'applique lorsqu'on suppose que AO est une branche de parabole généralisée dont le point A est le sommet, c'est-à-dire qu'elle possède un diamètre qui la coupe dans un sommet A et coïncide avec le côté AD du parallélogramme ADOT, dont l'autre côté AT est tangent à cette courbe dans ce même sommet, et que les segments $\mathsf{T}_1\mathsf{O}_1$ et $\mathsf{T}_2\mathsf{O}_2$ sont entre eux en une raison multiple quelconque de la raison qu'ont entre eux les segments $\mathsf{D}_1\mathsf{O}_1$ et $\mathsf{D}_2\mathsf{O}_2$.

Dans le langage de la théorie des proportions ceci signifie que les segments $\mathsf{T}_1\mathsf{O}_1$, $\mathsf{T}_2\mathsf{O}_2$, $\mathsf{D}_1\mathsf{O}_1$ et $\mathsf{D}_2\mathsf{O}_2$ satisfont le système de proportions

$$\begin{array}{l} \mathsf{T}_1\mathsf{O}_1 : \mathsf{T}_2\mathsf{O}_2 = \alpha : \beta \\ \mathsf{D}_1\mathsf{O}_1 : \mathsf{D}_2\mathsf{O}_2 = \alpha : \gamma_1 = \gamma_1 : \gamma_2 = \gamma_2 : \ldots : \gamma_{n-1} = \gamma_{n-1} : \beta \end{array} \tag{11}$$

où n est un nombre entier strictement positif et α, β, $\gamma_1, \ldots \gamma_{n-1}$ sont des quantités homogènes quelconques, dont une (par exemple α) est fixée arbitrairement

[13]Encore une fois ce résultat est justifié inductivement. Sa preuve déductive serait bien plus complexe que celle de l'égalité (5). Wallis aurait d'ailleurs seulement pu l'entreprendre par la méthode d'exhaustion.

[14]Cf. Wallis (1656*b*), prop. XLIV, 35. Cette interprétation me semble plus proche de la conception de Wallis que celle se réclamant de la limite de $\frac{\sum\limits_{i=0}^{h} i^2}{\sum\limits_{i=0}^{h} h^2}$ pour h qui tend vers l'infini, proposée par Whiteside et Baron [cf. Whiteside (1960-1962), 319-320 et Baron (1969), 209-210].

et les n autres sont déterminées à partir de celle-ci, en tant que quatrièmes proportionnelles convenables. On aura alors la proportion

$$y_1 : y_2 = ax_1^n : ax_1^n \tag{12}$$

où a est un coefficient constant quelconque, et donc, dans le formalisme de l'algèbre des segments de Descartes, l'équation

$$y = ax^n \tag{13}$$

référée à l'axe AT, à l'origine A et à l'angle $\widehat{\mathsf{TAD}}$.

Encore une fois Wallis ne suit pas Descartes dans une telle simplification ; il se limite à qualifier les courbes qu'il identifie successivement avec AO de "demi-parabole cubique", "demi-parabole bicarrée", "demi-parabole supersolide", etc. et à les caractériser en termes de compositions convenables de raisons. Il reconnaît néanmoins, aussi dans ces cas, que ces paraboles généralisées se caractérisent, par rapport à toute autre courbe, par une relation intime avec la puissance n (et non seulement avec une raison n-uple). Pour déterminer la valeur de m, il considère en effet les sommes $\sum\limits_{i=0}^{h} i^n$ et $\sum\limits_{i=0}^{h} h^n$, il observe que

$$\left[\frac{\sum\limits_{i=0}^{h} i^n}{\sum\limits_{i=0}^{h} h^n}\right]_{h=\omega} = \left[\frac{\sum\limits_{i=0}^{h} i^n}{h^n(h+1)}\right]_{h=\omega} = \frac{1}{n+1} \tag{14}$$

et il conclut que le rapport entre le triangle curviligne AOT délimité par la parabole d'ordre n et le parallélogramme ADOT correspondant est égal à $\frac{1}{n+1}$, ce qui donne : $m = n + 1$.

Le résultat exprimé par (14) peut s'exprimer aussi par le biais d'une correspondance entre les termes des deux progressions arithmétiques de raison unitaire, la première, de base 0, indiquant les valeurs successives de l'exposant n, et la deuxième, de base 1, indiquant les valeurs correspondantes de m. Si on indique par ${}_{\lambda}T_{\nu}^{\sigma}$ le ν-ième terme de la progression arithmétique de raison σ et de base λ, ce résultat peut alors s'exprimer par la correspondance

$${}_{0}T_{n+1}^{1} = n \longrightarrow {}_{1}T_{n+1}^{1} = n + 1 \tag{15}$$

L'égalité (14) exhibe donc un algorithme, valable pour tout nombre entier positif n, qui conduit de la puissance n au rapport $\frac{1}{n+1}$. Vue de cette manière, cette égalité institue une table qui fait correspondre des nombres entiers positifs à d'autres nombres entiers positifs, selon une règle qui conserve la forme d'une progression arithmétique : si les nombres qui constituent les entrées successives de cette table forment une progression arithmétique, alors les nombres qui constituent les sorties correspondantes forment, eux aussi, une progression arithmétique.

Bien qu'apparemment banale, cette constatation, est à la base de la généralisation que Wallis propose pour l'égalité (14) et, par conséquent, pour la méthode de quadrature que lui est associée. Celui-ci commence par observer[15] que de la

[15] Cf. Wallis (1656*b*), prop. XLVI-XLVII, 37-39.

connaissance de n'importe quel couple de nombres que cette table associe entre eux, il est facile de déduire le nombre que cette même table associe à n'importe quel autre nombre, sans s'appuyer pour ceci sur la loi d'association, mais en ne considérant que la condition de conservation de la forme d'une progression arithmétique. Ainsi si cette table associe le nombre θ au nombre ϑ ($\vartheta \longrightarrow \theta$) et qu'entre le nombre ϑ et un autre nombre quelconque τ il y a, mettons, $\mu - 1$ intermédiaires, alors la table devra associer à τ le nombre qui est séparée de θ par $\mu - 1$ intermédiaires. En d'autre termes :

$$\left.\begin{array}{l}\vartheta \longrightarrow \theta \\ \tau = \vartheta \pm \mu\end{array}\right\} \Rightarrow \tau \longrightarrow \theta \pm \mu \tag{16}$$

Il est clair que, bien que la table en question n'associe entre elles que deux progressions arithmétiques de raison 1, la nature même d'une progression arithmétique fait que la règle énoncée par (16) vaut quelque soit la raison commune des progressions arithmétiques considérées. Observer cela revient au même que d'observer qu'il est possible d'extraire de la première table autant d'autres tables qu'on veut, qui associent entre elles deux progressions arithmétiques de raison égale, disons σ :

$${}_{\vartheta}T^{\pm\sigma}_{n+1} = \vartheta \pm n\sigma \longrightarrow {}_{\vartheta+1}T^{\pm\sigma}_{n+1} = \vartheta \pm n\sigma + 1 \tag{17}$$

Aussi banale qu'elle puisse apparaître, la constatation précédente revient à passer de la considération de la table associée à l'égalité (14), prise en tant que telle, à la considération de sa forme. Et, lorsque cette forme a été déterminée, il est facile de parvenir à une interpolation de cette table.

C'est ainsi que Wallis débute[16] la deuxième étape de son parcours. Si on suppose que $\pm\sigma$ est un nombre rationnel positif quelconque, disons $\frac{k}{q}$ (k et q étant des nombres entiers positifs, dont le deuxième est différent de zéro), et que l'on revient à la position $\vartheta = 0$, qui nous ramène au début de la table originale, on obtient sur le champ la règle d'association

$${}_{0}T^{\frac{k}{q}}_{n+1} = n\frac{k}{q} \longrightarrow {}_{1}T^{\frac{k}{q}}_{n+1} = n\frac{k}{q} + 1 \tag{18}$$

qui est évidemment valable pour tout nombre entier positif n et définit une nouvelle table extraite de la première par interpolation. Il suffit alors de poser $nk = p$ pour tirer de là l'égalité

$$\left[\frac{\sum\limits_{i=0}^{h} i^{\frac{p}{q}}}{\sum\limits_{i=0}^{h} h^{\frac{p}{q}}}\right]_{h=\omega} = \left[\frac{\sum\limits_{i=0}^{h} i^{\frac{p}{q}}}{h^{\frac{p}{q}}(h+1)}\right]_{h=\omega} = \frac{1}{\frac{p}{q}+1} = \frac{q}{p+q} \tag{19}$$

où $\frac{p}{q}$ est un nombre rationnel positif quelconque ; c'est la généralisation cherchée de (14).

Si on emploie le formalisme algébrique de Descartes, il est aisé d'énoncer, en tant que conséquence immédiate d'une telle égalité, une règle de quadrature concernant une classe de courbes bien plus large que celle concernée par l'égalité

[16] Cf. Wallis (1656*b*), prop. LI-LIV, 41-44 et LVIII-LIX, 46-48.

(14) : lorsque la courbe AO délimitant le triangle curviligne AOT est telle que pour toute choix des points T_1 et T_2, on ait la proportion

$$\mathsf{T}_1\mathsf{O}_1 : \mathsf{T}_2\mathsf{O}_2 = (\mathsf{D}_1\mathsf{O}_1)^{\frac{p}{q}} : (\mathsf{D}_2\mathsf{O}_2)^{\frac{p}{q}} \tag{20}$$

(p et q étant des nombres entiers positifs avec $q \neq 0$), c'est-à-dire que cette courbe est exprimée dans cette algèbre par l'équation

$$y = ax^{\frac{p}{q}} \tag{21}$$

référée à l'axe AT, à l'origine A et à l'angle $\mathsf{T\hat{A}D}$, alors le rapport entre le triangle curviligne AOT et le parallélogramme ADOT est égale à $\frac{q}{p+q}$.

Encore une fois pourtant Wallis n'emploie pas ce formalisme et il parle plutôt[17] de "paraboloïdes" telles que les ordonnées appliquées au diamètre (c'est-à-dire $\mathsf{D}_1\mathsf{O}_1$ et $\mathsf{D}_2\mathsf{O}_2$) sont entre elles en raison double subtriple, double subquintuple,..., triple subquadruple, triple subquintuple,..., etc. des raisons des diamètres (c'est-à-dire $\mathsf{AD}_1 = \mathsf{T}_1\mathsf{O}_1$ et $\mathsf{AD}_2 = \mathsf{T}_2\mathsf{O}_2$). Il n'est pas difficile de comprendre quels systèmes de proportions correspondent à ces expressions assez baroques, et il n'est pas la peine ici d'insister sur ce point. Il est en revanche important de comprendre que la différence entre le langage de Descartes et celui de la théorie des proportions correspond ici à une différence plus profonde entre deux théories dans lesquelles les mêmes problèmes géométriques sont formulés et résolus.

Le formalisme de l'algèbre de Descartes permet d'associer aux puissances fractionnaires $i^{\frac{p}{q}}$ intervenant dans la sommes $\sum_{i=0}^{h} i^{\frac{p}{q}}$ des puissances fractionnaires des segments AT_i $(i = 1, 2)$ ou, si on préfère, du segment variable x, et donc, en définitive, des équations. En revanche la théorie des proportions oblige à associer à ces puissances des progressions caractérisées par un double indice. Lorsqu'elle est considérée par rapport à ses applications, la table qui dérive de l'égalité (19) ne se présente pas comme une succession de correspondances entre un exposant fractionnaire $\frac{p}{q}$ et un dénominateur fractionnaire constituant une quatrième proportionnelle, $m = \frac{p+q}{q}$, mais comme une matrice[18] associant le rapport $\frac{1}{m}$ à deux entiers positifs, fonctionnant comme des indices[19] :

$$\begin{array}{c|cccccc}
{}^{\qquad p}_{q} & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & \dots \\
\hline
 & & & & & & \dots \\
1 & \frac{1}{1} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \\
2 & \frac{2}{2} & \frac{2}{3} & \frac{2}{4} & \frac{2}{5} & \frac{2}{6} & \dots \\
3 & \frac{3}{3} & \frac{3}{4} & \frac{3}{5} & \frac{3}{6} & \frac{3}{7} & \dots \\
4 & \frac{4}{4} & \frac{4}{5} & \frac{4}{6} & \frac{4}{7} & \frac{4}{8} & \dots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots
\end{array} \tag{22}$$

[17]Cf. Wallis (1656*b*), prop. LXI, 49-50 ; cf. la note (22), ci-dessous.

[18]Ici, et dans la suite de ma dissertation, j'utilise le terme "matrice" pour indiquer des tables à double entrée telles que la table (22), sans vouloir suggérer que Wallis ou quiconque ait associé à ces tables une quelque sorte d'algèbre matricielle au sens moderne.

[19]Cf. Wallis (1656*b*), prop. LIX, 47-48.

Ceci aura de lourdes conséquences sur la suite de l'argumentation de Wallis qui ne saura jamais plus se libérer de ses matrices dont les côtés correspondent respectivement au dominateur et au dénominateur d'un rapport de nombres entiers positifs[20].

Ceci étant dit, on ne peut éviter de remarquer que, coincé à l'intérieur des limites imposées par la théorie des proportions, Wallis a su associer un algorithme de quadrature à son algorithme des rapports entre séries divergentes. Par la médiation de la méthode des indivisibles de Cavalieri, interprétée d'une nouvelle manière, la matrice (22) donne en effet la quadrature d'une large classe de courbes exprimées par des systèmes de proportions qu'il est relativement facile d'énoncer. La quadrature de ces courbes se réduit à la consultation de cette table, ou à l'application d'un algorithme fort simple qui en dérive.

* * *

Cet algorithme permet de trouver un nombre fractionnaire positif (ou, si on préfère, un rapport entre deux nombres entiers positifs) qui exprime le rapport entre certains triangles curvilignes et des parallélogrammes construits sur les côtés rectilignes de ces triangles. Si on indique par $\mathcal{T}$ un de ces triangles et par $\mathcal{P}$ le parallélogramme correspondant, ce résultat peut s'exprimer ainsi : $\frac{\mathcal{T}}{\mathcal{P}} = \frac{\mu}{\nu}$ (μ et ν étant des nombres entiers positifs). Si la courbe qui délimite le triangle curviligne est un paraboloïde pris à partir de son sommet et que les côtés rectilignes de ce triangle curviligne sont respectivement parallèles au diamètre de ce paraboloïde et à sa tangente dans ce même sommet, alors le triangle curviligne en question peut être associé à un nombre fractionnaire positif. L'algorithme associé à la méthode de Wallis, nous donne alors sur le champs le rapport $\frac{\mu}{\nu}$ cherché, et il nous dit en particulier que ce rapport est $\frac{p+q}{q}$, c'est-à-dire que $\frac{\mathcal{T}}{\mathcal{P}} = \frac{p+q}{q}$.

Or, si le triangle curviligne $\mathcal{T}$ est donné, alors aussi le parallélogramme $\mathcal{P}$, et donc sa base et son hauteur, sont donnés. Il est alors aisé de construire, en exploitant quelque proposition des *Éléments,* un segment $x_{\mathcal{T}}$ tel que le carré

[20]On mesure ici la différence entre la géométrie de Descartes, où à chaque condition caractérisant une courbe géométrique correspond un objet algébrique, c'est-à-dire une équation, et la théorie des proportions où, dans le plus heureux des cas, comme ce qui fait l'objet de la méthode de Wallis, à une courbe dont on suppose connaître des propriétés est associé un système de proportions.

$Q(x_{\mathcal{T}})$ construit sur ce segment est égal au triangle curviligne $\mathcal{T}$[21]. L'égalité $\frac{\mathcal{T}}{\mathcal{P}} = \frac{\mu}{\nu}$ contient donc une prescription pour la construction d'un carré égal à $\mathcal{T}$. C'est dans ce sens qu'on peut dire que Wallis fournit la quadrature de la courbe qui délimite $\mathcal{T}$[22]. On comprend alors que Wallis n'associe pas un nombre à ce triangle curviligne, fonctionnant comme une mesure de celui-ci (une aire, au sens moderne de ce terme. Il détermine un rapport de deux nombres entiers positifs qui est égal au rapport $\frac{\mathcal{T}}{\mathcal{P}}$ entre le triangle curviligne délimité par un de ces paraboloïdes et le parallélogramme construit sur ses côtés rectilignes, de sorte à rendre possible la construction d'un carré égal à $\mathcal{T}$. En restant fidèle à la tradition euclidienne, Wallis cherche ainsi une manière pour interpréter ce triangle curviligne comme une quantité.

Cela a une conséquence opérationnelle immédiate : bien que Wallis puisse utiliser sa méthode pour construire un carré égal à la somme de deux triangles curvilignes du genre considéré, il ne dispose de rien de semblable à un opérateur linéaire de quadrature. En d'autres termes : s'il peut parvenir à l'égalité

$$\mathcal{T}_1 + \mathcal{T}_2 = Q(x_{\mathcal{T}_1}) + Q(x_{\mathcal{T}_2}) = Q(x_{\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2}) \tag{23}$$

[21] En particulier, en exploitant la proposition 13.VI des *Éléments*, on construit un segment $c_{\mathcal{P}}$ tel que

$$b_{\mathcal{P}} : c_{\mathcal{P}} = c_{\mathcal{P}} : a_{\mathcal{P}}$$

$b_{\mathcal{P}}$ et $a_{\mathcal{P}}$ étant respectivement la base et la hauteur de $\mathcal{P}$. En accord avec la proposition VI.16 des mêmes *Éléments,* le carré $Q(c_{\mathcal{P}})$ construit sur le segment $c_{\mathcal{P}}$ sera égal au rectangle construit sur $b_{\mathcal{P}}$ et $a_{\mathcal{P}}$, et donc à $\mathcal{P}$. Si $\frac{\mathcal{T}}{\mathcal{P}} = \frac{\mu}{\nu}$, on aura alors $\frac{Q(c_{\mathcal{P}})}{\mathcal{T}} = \frac{\nu}{\mu}$, c'est-à-dire que :

$$[\mathcal{T} = Q(x_{\mathcal{T}})] \Leftrightarrow [Q(c_{\mathcal{P}}) : Q(x_{\mathcal{T}}) = \nu : \mu]$$

Or, quel que soit $x_{\mathcal{T}}$, selon la proposition VI.1 des *Éléments*, on a aussi les proportions :

$$\begin{array}{c} Q(c_{\mathcal{P}}) : R(c_{\mathcal{P}}, x_{\mathcal{T}}) = c_{\mathcal{P}} : x_{\mathcal{T}} \\ Q(x_{\mathcal{T}}) : R(c_{\mathcal{P}}, x_{\mathcal{T}}) = x_{\mathcal{T}} : c_{\mathcal{P}} \end{array}$$

$R(c_{\mathcal{P}}, x_{\mathcal{T}})$ étant le rectangle construit sur les segments $c_{\mathcal{P}}$ et $x_{\mathcal{T}}$. En éliminant $R(c_{\mathcal{P}}, x_{\mathcal{T}})$ de ces proportions, on a alors

$$\begin{array}{c} Q(c_{\mathcal{P}}) : Q(x_{\mathcal{T}}) = \alpha : \beta \\ c_{\mathcal{P}} : x_{\mathcal{T}} = \alpha : \gamma = \gamma : \beta \end{array}$$

c'est-à-dire que si β est la quatrième proportionnelle entre $Q(c_{\mathcal{P}})$, $Q(x_{\mathcal{T}})$ et une quantité α fixée, alors $c_{\mathcal{P}} : x_{\mathcal{T}} = \alpha : \gamma$, γ étant la moyenne proportionnelle entre α et β. Il s'ensuit ainsi que

$$[\mathcal{T} = Q(x_{\mathcal{T}})] \Leftrightarrow \left\{ (\nu : \mu = \alpha : \beta) \Rightarrow \left[\begin{array}{c} (\alpha : \gamma = \gamma : \beta) \Rightarrow \\ \Rightarrow (c_{\mathcal{P}} : x_{\mathcal{T}} = \alpha : \gamma) \end{array} \right] \right\}$$

Ainsi, si on fixe un segment α quelconque, la proportion $\nu : \mu = \alpha : \beta$ nous indique comment construire le segment β et de là la proportion $\alpha : \gamma = \gamma : \beta$ nous indique comment construire le segment γ. En disposant ainsi des segments $c_{\mathcal{P}}$, α et γ, il sera enfin aisé de construire le segment $x_{\mathcal{T}}$, qui ne dépendra évidemment pas du choix initial de α.

[22] Voici, par confirmation, ce que Wallis écrit dans la proposition LXI et dans le scolie qui la suit [Wallis (1656*b*), 49-50] :

> Sed & hinc innotescit methodus quadranti non modò Parabolam sed & Paraboloidea omnia (eorúmque complementa) non modò ea quorum ordinatim-applicatæ procedunt juxta rationis simplicis alicujus potestatis, [...] Sed & juxta rationem potestatis cujusvis ex simplicibus compositæ. Puta ; si ordinatim-applicatæ sint in diametrorum ratione dupplicatæ subtriplicata, subquintuplicata, subseptuplicata, &c. vel triplicatæ subquadruplicata subquintuplicata, &c. rationem habebunt ad Parallelogrammum circumscriptum eam quam habent 3 ad 5, 5 ad 7, 7 ad 9 &c. 4 ad 7, 5 ad 8, &c. [...].
>
> Atque hoc pacto aliæ adhuc figuræ curvilineæ [...] ad æquales rectilineas reducuntur.

où $\mathcal{T}_1$ et $\mathcal{T}_2$ sont deux triangles curvilignes délimités par un paraboloïde, et $x_{\mathcal{T}_1,\mathcal{T}_2}$ est évidemment l'hypoténuse d'un triangle rectangle dont $x_{\mathcal{T}_1}$ et $x_{\mathcal{T}_2}$ sont les côtés, il n'énonce aucune égalité analogue à

$$Aire(\mathcal{T}_1 + \mathcal{T}_2) = Aire(\mathcal{T}_1) + Aire(\mathcal{T}_1) = \frac{\mu_1}{\nu_1} Aire(\mathcal{P}_1) + \frac{\mu_2}{\nu_2} Aire(\mathcal{P}_2) \qquad (24)$$

Je m'explique. Si $\mathcal{T}_1$, $\mathcal{T}_2$, $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont pris comme tels, comme des triangles curvilignes et des parallélogrammes donnés, alors les sommes de $\mathcal{T}_1$ et $\mathcal{T}_2$ et de $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ n'ont de sens pour Wallis qu'en tant qu'elles sont définies, en accord avec l'égalité (23), comme des sommes de carrés[23]. En revanche, si ces triangles ou parallélogrammes sont pris comme des agrégats de segments, alors leurs sommes peuvent aussi être conçues comme les agrégats des segments qui résultent en additionnant chaque corde de $\mathcal{T}_1$ ou de $\mathcal{P}_1$ à chaque corde de $\mathcal{T}_2$ ou de $\mathcal{P}_2$. Si la variation des cordes de $\mathcal{T}_1$ et $\mathcal{T}_2$ est respectivement exprimée par la variation des termes des séries $\left[\sum_{i=0}^{h} i^{\frac{p_1}{q_1}}\right]_{h=\omega}$ et $\left[\sum_{i=0}^{h} i^{\frac{p_2}{q_2}}\right]_{h=\omega}$, et celle des cordes de $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ l'est par la variation des termes des séries $\left[\sum_{i=0}^{h} h^{\frac{p_1}{q_1}}\right]_{h=\omega}$ et $\left[\sum_{i=0}^{h} h^{\frac{p_2}{q_2}}\right]_{h=\omega}$, $\frac{p_1}{q_1}$ et $\frac{p_2}{q_2}$ étant deux nombres rationnels positifs, alors les variations des éléments des agrégats des cordes de $\mathcal{T}_1$ et $\mathcal{T}_2$ et de $\mathcal{P}_1$ et de $\mathcal{P}_2$ seront respectivement exprimées par les séries $\left[\sum_{i=0}^{h}\left(i^{\frac{p_1}{q_1}} + i^{\frac{p_2}{q_2}}\right)\right]_{h=\omega}$. Pourtant l'égalité (19) ne nous permet pas de calculer le rapport $\left[\frac{\sum_{i=0}^{h}\left(i^{\frac{p_1}{q_1}}+i^{\frac{p_2}{q_2}}\right)}{\sum_{i=0}^{h}\left(h^{\frac{p_1}{q_1}}+h^{\frac{p_2}{q_2}}\right)}\right]_{h=\omega}$ et ne nous permet donc pas de carrer directement la somme $\mathcal{T}_1 + \mathcal{T}_2$, ainsi conçue.

Ainsi, même si on voulait reconnaître dans le résultat énoncé par Wallis un algorithme de quadrature pour toute courbe d'équation $y = ax^{\frac{p}{q}}$, on ne pourrait pas penser cet algorithme comme extensible par linéarité à la quadrature d'une courbe d'équation $y = ax^{\frac{p_1}{q_1}} + bx^{\frac{p_2}{q_2}}$. Les séries $\left[\sum_{i=0}^{h} i^{\frac{p}{q}}\right]_{h=\omega}$ et $\left[\sum_{i=0}^{h} h^{\frac{p}{q}}\right]_{h=\omega}$, introduites par Wallis comme des expressions du triangle curviligne $\mathcal{T}$ et du parallélogramme $\mathcal{P}$, n'expriment donc ces objets géométriques que localement, lorsqu'il n'est question que de leur rapport. Si, comme Descartes, Wallis a vu l'avantage de coupler les objets géométriques avec des expressions non géométriques de ceux-ci, il n'est donc pas parvenu à construire une théorie des quadratures consistant en une manipulation de ces expressions.

* * *

Si $\mathcal{T}_1$ et $\mathcal{T}_2$ sont deux triangles curvilignes du genre considéré — dont les cordes varient respectivement comme les termes des séries $\left[\sum_{i=0}^{h} i^{\frac{p_1}{q_1}}\right]_{h=\omega}$ et $\left[\sum_{i=0}^{h} i^{\frac{p_2}{q_2}}\right]_{h=\omega}$ —

[23]Wallis peut certes imaginer de juxtaposer deux triangles curvilignes ou deux parallélogrammes l'un à côté de l'autre, mais, en général, cela ne produit aucune figure qu'on sache définir et traiter indépendamment de la considération des triangles curvilignes ou des parallélogrammes qui la composent. Dire que les résultats de ces juxtapositions sont les sommes des figures données revient donc à dire que ces sommes sont ces sommes.

l'algorithme de Wallis permet aussi de calculer leur rapport, sans passer par la prise en compte des carrés auxquels ils sont égaux[24].

Si les côtés de ces triangles sont égaux un à un (ce qui est toujours possible car, quels que soient les nombres fractionnaires positifs $\frac{p_1}{q_1}$ et $\frac{p_2}{q_2}$, les courbes d'équation $y = x^{\frac{p_1}{q_1}}$ et $y = x^{\frac{p_2}{q_2}}$ se touchent dans l'origine et se coupent pour $x = 1$) alors les parallélogrammes construits sur ces côtés sont égaux. En posant $\mathcal{P}_1 = \mathcal{P}_2 = \mathcal{P}$, on aura alors

$$\frac{\mathcal{T}_1}{\mathcal{P}} = \frac{q_1}{p_1 + q_1} \qquad ; \qquad \frac{\mathcal{T}_2}{\mathcal{P}} = \frac{q_2}{p_2 + q_2} \tag{25}$$

et donc

$$\frac{\mathcal{T}_1}{\mathcal{T}_2} = \frac{q_1 (p_2 + q_2)}{q_2 (p_1 + q_1)} \tag{26}$$

En revanche, si les côtés de ces triangles sont différents entre eux, de sorte que les parallélogrammes $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ construits sur ces côtés sont entre eux en raison composée des raisons de leurs bases et de leurs hauteurs, alors $\mathcal{T}_1$ et $\mathcal{T}_2$ sont entre eux en une raison qui est composée des raisons de $\mathcal{T}_1$ à $\mathcal{P}_1$, de $\mathcal{T}_2$ à $\mathcal{P}_2$ et de $\mathcal{P}_1$ à $\mathcal{P}_2$[25]. Si, en appliquant l'algorithme précédent, on trouve les proportions

$$\begin{array}{l} \mathcal{T}_1 : \mathcal{P}_1 = \mu_1 : \nu_1 \\ \mathcal{T}_2 : \mathcal{P}_2 = \mu_2 : \nu_2 \end{array} \tag{27}$$

on aura alors, en composant,

$$\frac{\mathcal{T}_1}{\mathcal{T}_2} = \frac{\mathcal{P}_1}{\mathcal{P}_2} \frac{\mu_1}{\mu_2} \frac{\nu_2}{\nu_1} \tag{28}$$

et donc[26]

$$\begin{array}{l} \mathcal{P}_1 : \mathcal{P}_2 = \alpha : \gamma \\ \mu_1 : \mu_2 = \gamma : \delta \\ \nu_2 : \nu_1 = \delta : \varepsilon \\ \mathcal{T}_1 : \mathcal{T}_2 = \alpha : \varepsilon \end{array} \tag{29}$$

où α, β, γ, δ et ε sont encore des quantités homogènes quelconques, dont une est choisie arbitrairement et les autres sont déterminées en fonction de celle-ci comme des quatrièmes proportionnelles.

Avant d'énoncer cette conséquence de sa méthode, Wallis sent l'exigence de rendre encore plus claire la nature purement algorithmique du résultat énoncé par l'égalité (19). C'est l'objet de la proposition LXIV de son traité [27]. Wallis

[24] Cf. Wallis (1656*a*), prop. LXV, 53.

[25] En effet, si b_1, b_2, a_1 et a_2 sont respectivement les bases et les hauteurs de $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$, et qu'on suppose que

$$\begin{array}{l} b_1 : b_2 = \alpha : \beta \\ a_1 : a_2 = \beta : \gamma \end{array}$$

alors

$$\mathcal{P}_1 : \mathcal{P}_2 = \alpha : \gamma$$

[26] Wallis dit en vérité que le rapport de $\mathcal{T}_1$ à $\mathcal{T}_2$ est celui de $\frac{\mu_1}{\nu_1} b_1 a_1$ à $\frac{\mu_2}{\nu_2} b_2 a_2$. Les écritures "$b_1 a_1$" et "$b_2 a_2$" (ou, dans la notation choisie par Wallis "AB" et "$\alpha\beta$") semblent pourtant indiquer non pas des produits de deux segments, exprimant les aires des parallélogrammes $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$, mais ces parallélogrammes eux-mêmes.

[27] Cf. Wallis (1656*a*), 52-53.

reconnaît implicitement que le rapport qui constitue le premier membre de cette égalité est complètement déterminé lorsque l'exposant $\frac{p}{q}$ est déterminé. Ce rapport peut ainsi être conçu comme un objet d'une nature particulière, dont le caractère individuel ne dépend que de la valeur d'un exposant, que, pour l'occasion, et sans aucune justification ultérieure, Wallis reconnaît comme un nombre positif, aussi bien rationnel qu'irrationnel[28]. En choisissant une notation convenable, l'idée de Wallis peut alors s'exprimer en réécrivant l'égalité (19) généralisée sous la forme :

$$\frac{\sum_r}{U_r} = \frac{1}{r+1} \tag{30}$$

où r est un nombre algébrique[29] positif quelconque, et les symboles "$\sum_r$" et "U_r" indiquent respectivement les séries $\left[\sum_{i=0}^{h} i^r\right]_{h=\omega}$ et $\left[\sum_{i=0}^{h} h^r\right]_{h=\omega}$[30].

Si, pour passer d'exposants fractionnaires à des exposants algébriques, il suffit d'observer que rien n'empêche de prendre dans la règle d'association (17) la raison σ comme un radical, la chose n'est pas aussi simple si l'on prétend interpréter le premier membre de l'égalité (30) comme un rapport entre un triangle curviligne et un parallélogramme. Dans ce cas, il faut en fait non seulement expliquer ce qu'est une puissance irrationnelle d'un nombre entier positif, mais aussi expliquer à quelle courbe correspond la variation des termes d'une série telle que $\left[\sum_{i=0}^{h} i^r\right]_{h=\omega}$, lorsque r n'est pas un nombre rationnel. Wallis est muet sur ce point et il ne fait aucune application géométrique de l'égalité (30) pour r irrationnel[31].

Ceci n'est pourtant pas un point essentiel dans l'économie de l'*Arithmetica infinitorum*. Bien plus important est le fait que Wallis tire de cette égalité l'idée de construire une sorte d'algèbre multiplicative portant, plutôt que directement sur des quantités, sur des séries telles que $\sum_r$. Il suffit pour cela d'introduire les définitions suivantes[32]:

$$\sum\nolimits_r \cdot \sum\nolimits_s = \sum\nolimits_{r+s} \qquad ; \qquad \frac{\sum_r}{\sum_s} = \sum\nolimits_{r-s} \tag{31}$$

où r et s sont des nombres (algébriques) positifs quelconques. Multiplier ou diviser les séries $\sum_r$ et $\sum_s$ signifie ainsi, dans le langage de Wallis, multiplier et diviser entre eux les termes correspondants de ces séries, en formant ensuite la série des produits ou des quotients qui en résulte.

[28] Wallis observe que sa règle vaut aussi pour des nombres irrationnels, en prenant pour exemple $\sqrt{3}$. En parlant de nombres irrationnels, il ne semble penser pourtant qu'à ceux que nous qualifions aujourd'hui d'irrationnels algébriques. Comme on le verra, ce sera justement à la fin de son traité que Wallis saisira (de manière d'ailleurs encore assez confuse) la possibilité de quelque chose comme des nombres transcendants.

[29] Cf. la note (28), ci-dessus.

[30] Wallis appelle la deuxième de ces séries "série des égaux" [cf. Wallis (1656*b*), 53], en reconnaissant qu'elle est totalement déterminé lorsque la série $\left[\sum_{i=0}^{h} i^r\right]_{h=\omega}$ l'est.

[31] On remarque pourtant que l'argument de Wallis n'est pas sans suggérer la voie qui va permettre plus tard de généraliser la notion de puissance à des exposants quelconques, cette voie étant justement celle de l'interpolation par continuité.

[32] Cf. Wallis (1656*b*), prop. LXXIII-LXXXIV, 58-59 et LXXXI-LXXXII, 63-64.

Cette sorte d'algèbre, convenablement étendue à la considération des séries des égaux[33], ne sera employée par Wallis que dans la deuxième partie de son traité[34], lorsqu'il sera question de chercher la quadrature du cercle. Avant d'y venir, celui-ci ne peut pourtant éviter d'observer que, si aucune restriction n'est introduite, la deuxième de ces définitions pose la question des séries à indice négatif. Au lieu d'exclure ces séries de sa théorie en introduisant la restriction $r \geq s$, Wallis montre aussitôt comment ces séries peuvent être géométriquement interprétées[35].

Soit $\mathsf{Bb'bAC}$ (fig. 2.a) un triangle curviligne délimité par un paraboloïde $\mathsf{Bbb'A}$ de diamètre AL et d'ordre n (n étant un nombre entier positif plus grand que 2), inscrit dans un triangle rectiligne BCA. Quels que soient les points a et $\mathsf{a'}$, pris sur le côté AC de ce triangle, les cordes ab et $\mathsf{a'b'}$ du triangle curviligne $\mathsf{Bb'bAC}$ satisferont par définition le système de proportions

$$\begin{array}{l} \mathsf{ab} : \mathsf{a'b'} = \alpha : \beta \\ \mathsf{Aa} : \mathsf{Aa'} = \alpha : \gamma_1 = \gamma_1 : \gamma_2 = \ldots = \gamma_{n-1} : \beta \end{array} \tag{32}$$

où α, β, γ_1, ..., γ_{n-1} sont, comme ci-dessus, des quantités homogènes quelconques, dont une est prise de manière arbitraire et les autres sont déterminées en fonction de celle-ci comme des quatrièmes proportionnelles. On suppose que les rectangles abhk et $\mathsf{a'b'h'k'}$ construits respectivement sur les cordes ab et $\mathsf{a'b'}$ de ce triangle curviligne sont respectivement égaux aux carrés construits sur les cordes correspondantes ae et $\mathsf{a'e'}$ du triangle rectiligne BCA. Il s'ensuit que les côtés bh et $\mathsf{b'h'}$ de ces rectangles satisfont les proportions

$$\begin{array}{l} \mathsf{ab} : \mathsf{ae} = \mathsf{ae} : \mathsf{bh} \\ \mathsf{a'b'} : \mathsf{a'e'} = \mathsf{a'e'} : \mathsf{b'h'} \end{array} \tag{33}$$

Comme, de la proposition VI.2 des *Éléments* (théorème de Thalès), il suit que

$$\mathsf{Aa} : \mathsf{ae} = \mathsf{Aa'} : \mathsf{a'e'} \tag{34}$$

de là il s'ensuit que

$$\begin{array}{l} \mathsf{b'h'} : \mathsf{bh} = \alpha : \delta \\ \mathsf{Aa} : \mathsf{Aa'} = \alpha : \varepsilon_1 = \varepsilon_1 : \varepsilon_2 = \ldots = \varepsilon_{n-3} : \delta \end{array} \tag{35}$$

où α, δ, ε_1, ..., ε_{n-3} sont encore des quantités homogènes quelconques déterminées en fonction d'une d'entre elles. Si on pose $\mathsf{bh} = \mathsf{aK}$ et $\mathsf{b'h'} = \mathsf{a'K'}$, cette proportion caractérise une courbe $\mathsf{NKK'DM}$ qui sera de ce fait un hyperboloïde équilatère d'ordre $n-2$. Il suffit de prolonger BC jusqu'à rencontrer cet hyperboloïde en D pour voir que cette courbe délimite un trapézoïde curviligne infini NDCA dont les cordes parallèles à l'asymptote AN varient comme les termes de la suite $\sum_{-n+2}$. Si de D on tire ensuite la parallèle DE à l'axe AM, on construit un parallélogramme AEDC dont les cordes se comportent entre eux comme les termes de la série des égaux U_{-n+2}. Or, si l'algorithme exprimé par (14) est étendu au cas d'exposants entiers négatifs, on aura

$$\frac{\sum_{-n+2}}{U_{-n+2}} = \frac{1}{-n+3} \tag{36}$$

[33]Cf. la note (30), ci-dessus.

[34]Cf. la section 2.

[35]Cf. Wallis (1656*b*), prop. LXXXIII-CI, 65-75. Je généralise ici l'argument de Wallis qui, sans doute pour des raisons de simplicité, mais sans aucune nécessité, se limite à considérer des paraboloïdes et des hyperboloïdes (ou hyperboles généralisées) rectangles .

et, en raisonnant comme ci-dessus, on devra en conclure que le rapport $\frac{\mathsf{NDCA}}{\mathsf{AEDC}}$ entre ce trapézoïde et ce parallélogramme est égal à $\frac{1}{-n+3}$.

En raisonnant comme on l'a fait pour des séries à exposants positifs, il est naturellement possible de généraliser l'algorithme exprimé par l'égalité (36) à des exposants non entiers. Il restera encore, si on veut arriver jusqu'à des exposants algébriques, et qu'on veut appliquer cet algorithme à la quadrature des trapézoïdes correspondants, à donner un sens à des puissances négatives et non rationnelles d'un nombre entier et à expliquer à quelle courbe correspond la variation des termes d'une série telle que $\left[\sum_{i=0}^{h} i^{-r}\right]_{h=\omega}$, lorsque r est un nombre positif non rationnel.

Encore une fois, Wallis n'aborde pourtant pas ce problème. Il ne peut en revanche pas éviter de prendre en compte la conclusion inévitable à laquelle nous mène l'argument précédent : si dans l'égalité (36) on pose $n = r + 2$, il s'ensuit que le rapport entre un trapézoïde délimité par un hyperboloïde équilatère d'ordre r et le parallélogramme inscrit est égal à $\frac{1}{1-r}$. Donc[36], si $r < 1$, cet argument nous conduit à conclure qu'un trapézoïde infini, tel que NDCA, a un rapport fini avec le parallélogramme inscrit ; si $r = 1$, cet argument nous conduit à affirmer qu'un trapézoïde délimité par une hyperbole ordinaire équilatère a un rapport infini avec le parallélogramme inscrit ; enfin, si $r > 1$, cet argument nous conduit à affirmer que le trapézoïde infini NDCA a un rapport négatif avec le parallélogramme inscrit. Aucune de ces conclusions ne semble étonner Wallis.

Pour justifier la première, il se réclame d'un résultat de Torricelli, qui avait déjà montré qu'un solide infini engendré par la révolution d'un hyperbole autour d'une asymptote, est égal à un cylindre fini[37].

Quant à la troisième, il considère qu'affirmer que le rapport entre le trapézoïde NDCA et le parallélogramme inscrit est négatif revient à affirmer que ce même rapport est plus qu'infini[38], une affirmation que les interprètes[39] du texte de Wallis ont généralement considérée comme absurde.

Pourtant, Wallis remarque ensuite[40] que si la courbe $\mathsf{NKK'DM}$ est construite sur le diamètre AL plutôt que sur l'axe AC, de sorte que les cordes du trapézoïde NDCA soient parallèles à cet axe (c'est le cas de la figure 2.b, où on aura posé $\mathsf{Aa}_* = \mathsf{Aa}$, $\mathsf{Aa}'_* = \mathsf{Aa}'$, $\mathsf{AC}_* = \mathsf{AC}$, $\mathsf{AE}_* = \mathsf{AE}$, et, par conséquent, $\mathsf{a}_*\mathsf{K} = \mathsf{aK}$, $\mathsf{a}'_*\mathsf{K}' = \mathsf{a}'\mathsf{K}'$, $\mathsf{C}_*\mathsf{D} = \mathsf{CD}$, et $\mathsf{E}_*\mathsf{D} = \mathsf{ED}$), alors les ordonnées tirées de ce même axe vers cette courbe, entre A et C, deviendront des cordes du trapézoïde MFCA. Or comme le trapézoïde $\mathsf{NAC}_*\mathsf{D}$ est évidemment égal au trapézoïde NDCA, il s'ensuit que si du trapézoïde MFCA on enlève la partie $\mathsf{FCE}_*\mathsf{D}$, on obtient un nouveau trapézoïde, $\mathsf{MAE}_*\mathsf{D}$ qui a avec le parallélogramme inscrit $\mathsf{AC}_*\mathsf{DE}_*$ le rapport positif $1 - \frac{1}{1-r} = \frac{1}{1-\frac{1}{r}} = \frac{r}{r-1}$. En revenant à la situation initiale (c'est-à-dire à la figure 2.a), cela équivaut à affirmer que le trapézoïde CDM a avec le parallélogramme AEDC le rapport positif, $\frac{r}{r-1} - 1 = \frac{1}{r-1}$.

Je suis donc porté à penser que le langage baroque des rapports plus qu'infinis ne fait en réalité qu'évoquer une règle qui prescrit que si $r > 1$ il faut considérer

[36]Cf. Wallis (1656*b*), prop. CII-CVII, 76-83.

[37]Cf. Wallis (1656*b*), prop. CVII, scolie, 83 et Torricelli (OLV), I, 191-213 ("De solido hyperbolico acuto"), en particulier 193-194.

[38]Cf. Wallis (1656*b*), prop. CIV, 78-79.

[39]Cf., entre autres, Cantor (1880-1908), II, 825 et Scott (1938), 43-46.

[40]Cf. Wallis (1656*b*), prop. CVII, 81-84.

non pas le trapézoïde NDCA, mais le trapézoïde CDM, et identifier le rapport entre ce trapézoïde et le parallélogramme AEDC avec le rapport positif $\frac{1}{r-1}$[41].

Il ne reste donc à considérer que la deuxième conclusion, concernant un trapézoïde délimité par une hyperbole ordinaire. Celle-ci apparaît à Wallis comme claire par elle-même, et il ne l'accompagne d'aucun commentaire[42]. Dans ce cas la symétrie de la courbe par rapport à ses deux asymptotes, c'est-à-dire à l'axe AC et au diamètre AL empêche d'ailleurs de raisonner par inversion, comme Wallis le fait dans le cas où r est plus grand que 1.

Bien que, dans la *dedicatio* de son traité, Wallis mentionne l'*Opus Geometricum* de Grégoire de Saint-Vincent[43] — où il est montré que tous segments d'hyperbole, dont la base est comprise entre deux valeurs de l'abscisse constituant deux termes successifs d'une progression géométrique quelconque, sont égaux entre eux[44] — il ne sait tirer de sa méthode aucune suggestion pour traiter une courbe comme l'hyperbole dont on sait ajourd'hui que son aire n'est pas définie dans l'origine. Ce n'est qu'une conséquence d'une faiblesse intrinsèque de la méthode de Wallis, qui ne concerne pas des trapézoïdes quelconques délimités par des portions quelconques des paraboloïdes ou des hyperboloïdes considérées. Il est clair en effet que la méthode de Wallis ne s'applique qu'à des triangles curvilignes délimités soit par une portion d'un commençant dans le sommet de ce paraboloïde et par des axes donnés respectivement par la tangente à ce paraboloïde dans ce même sommet et par une droite parallèle à son diamètre, soit par une portion d'un hyperboloïde commençant en un point à l'infini et par des axes donnés respectivement par un des asymptotes de cet hyperboloïde et par une parallèle à l'autre asymptote.

En termes modernes, cela signifie que Wallis ne peut carrer ses courbes qu'à partir de l'origine d'un système de coordonnées construit sur ces mêmes courbes d'une manière standard, ou de l'infini[45]. Il ne peut donc opérer aucune sorte de translation ou substitution. Cette limitation décisive de la méthode de Wallis, l'empêche — autant ici que plus tard, quand il sera question de carrer le cercle — de saisir la possibilité de transformer cette méthode en une véritable opération de quadrature, propre à passer, dans certains cas, du domaine des

[41] On comprendra qu'en termes modernes, cela équivaut à intégrer la fonction $y = x^{-r}$ non pas entre 0 et une valeur ξ positive quelconque, mais entre ξ et ∞, pour obtenir l'égalité

$$\int_{\xi}^{\infty} x^{-r}dx = \frac{1}{r-1}\xi^{1-r}$$

[42] Cf. Wallis (1656*b*), prop. CIII, 77-78.

[43] Cf. Wallis (1656*b*), [8].

[44] Cf. Grégoire de Saint Vincent (1647), prop. 109.VI, 586. En termes modernes cela signifie que, pour tout α, β et γ,

$$\int_{x^{\alpha}}^{x^{\alpha+\gamma}} \frac{1}{z}dz = \int_{x^{\beta}}^{x^{\beta+\gamma}} \frac{1}{z}dz$$

Pour trouver la fonction $f(x) = \int_1^x \frac{1}{z}dz$, il faut donc résoudre l'équation fonctionnelle

$$f(x^{\alpha+\gamma}) - f(x^{\alpha}) = f(x^{\beta+\gamma}) - f(x^{\beta})$$

dont la solution est banalement le logarithme. La possibilité d'exprimer le trapézoïde compris entre une hyperbole et ses asymptotes au moyen du logarithme ne fut pourtant explicitée que par Sarasa, en 1649 [cf. Sarasa (1649)]. Sur la théorie des hyperboles de Grégoire, cf. Dhombres (1995).

[45] Cf. la note 41, ci-dessus.

courbes géométriques à celui des courbes mécaniques, ce qui sera un des acquis fondamentaux de Newton. Cela sera plus clair à la lumière de l'argument qui conduit Wallis à la quadrature du cercle. C'est justement à cet argument qu'il convient donc de venir[46].

2 La quadrature du cercle

Avant d'exposer le parcours suivi par Wallis pour parvenir à carrer le cercle, il convient de rendre explicite ce que Wallis ne peut pas faire, encore que ceci pourrait apparaître à nos yeux comme une conséquence naturelle des résultats précédents.

À cause de la non linéarité de son algorithme de quadrature, Wallis ne peut pas appliquer cet algorithme à la quadrature de courbes dont l'ordonnée est exprimée par une série de puissances. D'autre part, à cause de la nécessité de considérer des portions de ses courbes qui débutent en un point particulier de ces mêmes courbes, il ne peut imaginer rien de semblable à une méthode de quadrature par substitution, car il ne peut pas modifier les limites de quadrature. S'il veut parvenir à appliquer son algorithme à la quadrature du cercle, il doit donc nécessairement chercher à étendre cet algorithme à des rapports autres que les rapports $\frac{\sum_r}{U_r}$, et propres à exprimer le rapport d'une section de cercle à un parallélogramme construit de manière standard à partir de celle-ci.

Wallis commence par calculer les puissances entières des binômes

$$U_n - \sum\nolimits_n = \left[\sum_{i=0}^{h} (h^n - i^n)\right]_{h=\omega} \tag{37}$$

prises relativement à la multiplication définie par les égalités (31), et à calculer le rapport que ces puissances ont avec des séries des égaux convenables. Après avoir déterminé une matrice carrée fournissant les valeurs que ce rapport prend dans les différents cas possibles, il cherche à interpoler cette matrice d'une manière propre à fournir une valeur intermédiaire de ce rapport, qu'il identifie avec la valeur du rapport d'un quart de cercle au carré construit sur son rayon. C'est au long de ce parcours que Wallis retrouve l'énigme qu'il avait mise de côté — ou que plus probablement il n'avait pas saisie — dans le cas de l'hyperbole : comment exprimer des rapports différents de tout rapport entre deux nombres entiers ?

En utilisant la notion introduite ci-dessus, le premier des résultats atteints par Wallis peut s'exprimer ainsi[47] :

$$\frac{(U_n - \sum_n)^p}{U_{np}} = \prod_{i=1}^{p} \frac{in}{in+1} \tag{38}$$

où n et p sont des nombres entiers strictement positifs quelconques, et la puissance est prise par rapport à la multiplication définie par les égalités (31). Wallis justifie ce résultat inductivement ; il n'est pourtant pas difficile de voir comment

[46] Wallis étend en vérité sa méthode pour la quadrature du cercle à la quadrature de l'ellipse (ce qui lui vaut d'être considéré comme un des précurseurs de la théorie des intégrales elliptiques [cf., entre autres, Houzel (1978), 293]).

[47] Cf. Wallis (1656*b*), prop. CVIII-CXXVI, 84-98.

il pourrait être démontré déductivement à l'aide du développement binomial restreint au cas d'exposants entiers positifs.

* * *

Ce qui est intéressant dans la preuve de Wallis n'est pourtant pas cet usage de l'induction qui, dans un cas comme celui-ci, n'est rien d'autre qu'un moyen pour exprimer, faute d'une notation convenable, un argument déductif fondé sur la considération d'un rapport générique de la forme considérée[48]. C'est plutôt la manière dont Wallis démontre l'égalité (38) pour des valeurs particulières de n et p qui doit retenir notre attention. Dans le cas où $n = 2$ et $p = 3$, la preuve de Wallis peut, par exemple, être reconstruite comme suit :

$$\begin{aligned}\left(U_2 - \sum\nolimits_2\right)^3 &= (U_2)^3 - 3\,(U_2)^2 \sum\nolimits_2 + 3U_2 \left(\sum\nolimits_2\right)^2 - \left(\sum\nolimits_2\right)^3 \\ &= U_6 - 3U_4 \left(\frac{1}{3}U_2\right) + 3U_2 \left(\sum\nolimits_4\right) - \sum\nolimits_6 \\ &= U_6 - U_6 + 3U_2 \left(\frac{1}{5}U_4\right) - \frac{1}{7}U_6 \\ &= \frac{16}{35}U_6 = \frac{2 \times 4 \times 6}{3 \times 5 \times 7}U_6\end{aligned} \tag{39}$$

Cet argument emploie les deux règles suivantes :

$$\begin{aligned}U_\nu \cdot U_\mu &= U_{\nu+\mu} \\ \sum\nolimits_\nu &= \frac{1}{\nu+1}U_\nu\end{aligned} \tag{40}$$

où ν et μ sont des nombres entiers positifs quelconques. La première de ces règles ne dérive que d'une extension aux séries des égaux de la multiplication définie sur les séries $\sum_r$, tandis que la deuxième suit de l'égalité (14) par une simplification croisée[49]. En exploitant ces deux règles, on aura ensuite

$$U_\mu \cdot \sum\nolimits_\nu = \frac{1}{\nu+1}U_\mu \cdot U_\nu = \frac{1}{\nu+1}U_{\mu+\nu} \tag{41}$$

qui complète la définition de la multiplication sur les séries $\sum_r$ et U_r[50].

On voit alors que, encore qu'incapable de saisir les avantages de la nouvelle géométrie de Descartes, Wallis est en condition de définir, bien qu'implicitement, un formalisme assez sophistiqué. Ce formalisme ne s'applique pourtant qu'à des situations géométriques fort particulières ; c'est sa faiblesse face au formalisme de Descartes.

[48]Sur cette pratique démonstrative dans les mathématiques des XVI$^{\text{ème}}$ et XVII$^{\text{ème}}$ siècles, cf. Giusti (1999), 44.

[49]On observe que cette simplification croisée intervient ici dans un contexte purement arithmétique, et n'a, en tant que telle, aucune signification géométrique particulière.

[50]On observe que suivant la deuxième des règles 40, on a

$$\begin{aligned}U_\nu \cdot U_\mu &= (\nu+1)\sum\nolimits_\nu \cdot (\mu+1)\sum\nolimits_\mu = (\nu+1)(\mu+1)\sum\nolimits_{\nu+\mu} \\ &= \nu\mu + (\nu+\mu+1)\sum\nolimits_{\nu+\mu} = \nu\mu + U_{\nu+\mu}\end{aligned}$$

et il suffit donc d'omettre le produit $\nu\mu$ face à la série divergente $U_{\nu+\mu}$ pour avoir la première règle.

* * *

Ceci dit, revenons à l'égalité (38) et à son application à la quadrature du cercle. Soit[51] ABC (fig. 3) un quart de cercle de rayon AB = BS = r. D'après la proposition VI.13 des *Éléments*, la demi-corde TS satisfait la proportion

$$r - \mathsf{TB} : \mathsf{TS} = \mathsf{TS} : r + \mathsf{TB} \tag{42}$$

Si on suppose que le segment TB pris sur la base AB varie comme les termes de la série $\sum_1$ (ce qui signifie, dans notre langage, que ce segment est pris comme variable principale du problème), alors, du fait que r est constant et égal au plus grand de ces segments, il s'ensuit que les cordes TS du quart de cercle ABC varient comme les termes d'une série qui constitue le terme intermédiaire entre les termes $U_1 - \sum_1$ et $U_1 + \sum_1$, dans une progression géométrique de séries, soumis aux égalités (31). En d'autres termes, les cordes TS varient comme les moyens proportionnels entre les termes $[h-i]_{h=\omega}$ et $[h+i]_{h=\omega}$ ($i = 0, 1, ...$) des séries $U_1 - \sum_1$ et $U_1 + \sum_1$. En calculant ces moyens proportionnels (avant de passer à l'infini), et en appliquant la première des égalités (31), on en conclut que les cordes TS varient comme les termes de la série[52]

$$\begin{aligned}
\left[\sum_{i=0}^{h} \sqrt{(h-i)\,(h+i)}\right]_{h=\omega} &= \left[\sum_{i=0}^{h} \sqrt{h^2 - i^2}\right]_{h=\omega} \\
&= \left(\left[\sum_{i=0}^{h} \left(h^2 - i^2\right)\right]_{h=\omega}\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left(\left[\sum_{i=0}^{h} h^2 - \sum_{i=0}^{h} i^2\right]_{h=\omega}\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left(\left[\sum_{i=0}^{h} h^2\right]_{h=\omega} - \left[\sum_{i=0}^{h} i^2\right]_{h=\omega}\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left(U_2 - \sum\nolimits_2\right)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned} \tag{43}$$

Comme les deux quarts de cercle ABC et ABD sont égaux et symétriques, de sorte qu'à chaque corde TS du premier, correspondant au segment AT $= r -$ TB

[51]Cf. Wallis (1656a), prop. CXXI, 91-92.

[52]Wallis pose en réalité, directement "r" à la place de "h", et "ia" à la place de "i" ($i = 0, 1, ...$), en affirmant que les cordes TS varient comme les moyens proportionnels des termes $[r - ia]$ et $[r + ia]$ des séries $\sum_{i=0}^{\infty} (r - ia)$ et $\sum_{i=0}^{\infty} (r + ia)$, c'est-à-dire comme les termes de la série $\sum_{i=0}^{\infty} \sqrt{r^2 - i^2a^2} = \sqrt{\sum_{i=0}^{\infty} r^2 - i^2a^2}$. En introduisant la constante a, Wallis évite de devoir travailler avec des additions et des soustractions entre le segment r et des nombres entiers positifs, ce qui enfreindrait le principe d'homogénéité. Pourtant, les écritures "r^2" et "$\sqrt{r^2 - i^2a^2}$" supposent implicitement ou bien que r n'est pas le rayon du cercle considéré, mais un nombre exprimant ce rayon — ce qui rendrait inutile l'introduction de la constante a et demanderait d'expliquer précisément comment un nombre peut exprimer un segment —, ou bien que Wallis ait défini, de même que Descartes, une multiplication sur les segments — ce qui n'est pas le cas. Évidemment, l'argument de Wallis relève de notations imprécises. Il montre pourtant comment la pratique de ce dernier a désormais dépassé les limites restreintes de sa théorie.

pris sur la base $\mathsf{AB} = r$, correspond une corde $\mathsf{T'S'}$ du deuxième, correspondant au segment $\mathsf{BT'}$, pris sur cette même base, de là il s'ensuit que :

$$\frac{\mathsf{ABC}}{\mathsf{ABCD}} = \frac{(U_2 - \sum_2)^{\frac{1}{2}}}{U_1} \tag{44}$$

où le deuxième membre se réduit au premier membre de l'égalité (38) pour $n = 2$ et $p = \frac{1}{2}$. Pour carrer le cercle, il faut aussi chercher à étendre cette dernière égalité au cas où p est un nombre fractionnaire.

* * *

Avant de voir comment Wallis accomplit cette tâche, il est nécessaire de s'arrêter un instant pour considérer la nature de son argument.

Ceci n'est correct que parce qu'il porte sur un quart de cercle pris dans sa totalité, c'est-à-dire que la corde BC qui délimite le triangle curviligne à carrer est égale à la base AB de ce triangle. Il y a deux raisons à ceci. D'abord, la proportion (42) fait intervenir le rayon r de ce quart de cercle, qui est identifié avec la valeur maximale de la variable i qui intervient dans la série $\sum_1$, et donc avec la valeur constante des termes de la série U_1. Ensuite le passage de l'égalité (43) à l'égalité (44) s'appuie sur la symétrie entre ABC et ABD. En effet le segment TB qui est supposé varier comme les termes de la série $\sum_1$ (et fonctionne donc comme la variable principale du problème) est nul lorsque la corde TS (qui fonctionne en revanche comme la variable dépendante) est maximal et égale au rayon r, et il est maximale et égal au même rayon r lorsque cette corde est nulle ; au contraire le terme i^2 de la série $\sum_2$ est nul lorsque le terme i de la série $\sum_1$ est nul et n'est maximal — et peut donc être pris comme correspondant à r^2, c'est-à-dire au terme constant de la série U_2 — que lorsque ce même terme i est maximal — et peut donc être pris comme correspondant à r, c'est-à-dire au terme constant de la série U_1. L'argument de Wallis ne peut donc pas fournir le rapport entre n'importe quelle portion ATS de ce quart de cercle et le rectangle construit sur la base AT et la hauteur TS de cette portion. Il ne s'applique qu'à la quadrature du quart de cercle. En d'autres termes, le rapport que cet argument permet de déterminer est non seulement constant (comme c'était déjà le cas des quadratures établies par Wallis dans la première partie de son traité), mais c'aussi le rapport qu'ont entre eux deux figures qui doivent à leur tour être prises, l'une et l'autre, comme constantes, le quart d'un cercle et le carré construit sur son rayon[53].

À la différence que dans les cas des quadratures des paraboloï des et des hyperboloïdes, aucune simplification croisée n'aurait ainsi pu transformer la

[53]La condition de symétrie entre ABC et ABD aurait pu être éliminée en modifiant l'argument précédent de manière convenable. Au lieu de se réclamer de la proportion (42) et supposer que les segments TB varient comme les termes de la série $\sum_1$, Wallis aurait pu se réclamer de la proportion équivalente

$$\mathsf{AT} : \mathsf{TS} = \mathsf{TS} : 2r - \mathsf{AT} \tag{45}$$

et supposer que les segments AT varient comme les termes de la série $\sum_1$. Dans ce cas, il aurait conclu que les cordes TS varient comme les termes d'une série qui, conformément aux égalités (31), constitue le terme intermédiaire entre les termes $\sum_1$ et $2U_1 - \sum_1$, dans une progression géométrique de séries, c'est-à-dire que les cordes TS varient comme les moyens proportionnels des termes i et $[2h - i]_{h=\omega}$ $(i = 0, 1, ...)$ des séries $\sum_1$ et $2U_1 - \sum_1$. De là, il quadrature du cercle donnée par Wallis en un résultat que nous pourrions aujourd'hui interpréter comme l'exhibition d'une fonction intégrale[54].

aurait pu conclure que les cordes TS varient comme les termes de la série

$$\begin{aligned}
\left[\sum_{i=0}^{h}\sqrt{i(2h-i)}\right]_{h=\omega} &= \left[\sum_{i=0}^{h}\sqrt{2hi-i^2}\right]_{h=\omega} \\
&= \left(\left[\sum_{i=0}^{h}\left(2hi-i^2\right)\right]_{h=\omega}\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left(\left[\sum_{i=0}^{h}2hi-\sum_{i=0}^{h}i^2\right]_{h=\omega}\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left(\left[2h\sum_{i=0}^{h}i\right]_{h=\omega}-\left[\sum_{i=0}^{h}i^2\right]_{h=\omega}\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left(2U_1\sum\nolimits_1-\sum\nolimits_2\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left(2U_1\frac{1}{2}U_1-\sum\nolimits_2\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left(U_2-\sum\nolimits_2\right)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

C'est la même conclusion que tout-à-l'heure, et elle est cette fois obtenue sans s'appuyer sur la symétrie entre ABC et ABD. Pourtant, à cause de la proportion (45), l'argument qui conduit à cette conclusion s'appuie, de même que celui de Wallis, sur la correspondance entre la valeur maximale $h=\omega$ de i et le rayon r pris dans sa totalité, et donc ne pas s'appliquer non plus à une portion quelconque du cercle.

[54]Dans les propositions CXXXIII-CLXVII de son traité [cf. Wallis (1656*b*), 106-135], Wallis explore en vérité une autre voie pour parvenir à la quadrature du cercle, se rapportant à la proportion (45). En identifiant la constante intervenant dans la série des égaux U_1avec diamètre du cercle, de cette proportion il s'ensuit l'égalité

$$\frac{\mathsf{ABC}}{2(\mathsf{ABCD})}=\frac{\left(U_1\sum_1-\sum_2\right)^{\frac{1}{2}}}{U_1}$$

Pour calculer le rapport $\frac{\left(U_1\sum_1-\sum_2\right)^{\frac{1}{2}}}{U_1}$, et trouver ainsi le premier, Wallis passe par un très long argument qui le conduit à déterminer des matrices qu'on pourrait résumer par les deux égalités suivantes :

$$\frac{\left(U_n\sum_m-\sum_{n+m}\right)^p}{U_{p(n+m)}}=\frac{\prod_{i=0}^{p-1}n(i+1)}{\prod_{i=0}^{p}(ni+mp+1)}$$

et

$$\frac{\left(U_{\frac{\nu}{\mu}}\sum_{\frac{1}{\mu}}-\sum_{\frac{\nu+1}{\mu}}\right)^p}{U_{p(\frac{\nu+1}{\mu})}}=\frac{\prod_{i=0}^{p-1}\frac{\nu}{\mu}(i+1)}{\prod_{i=0}^{p}(\frac{\nu}{\mu}i+\frac{p}{\mu}+1)}$$

où n, m, ν, μ et p sont des nombres entiers positifs quelconques. Comme la première de ces trois égalités n'est correcte qu'à condition qu'on fasse correspondre la constante intervenant dans la série des égaux U_1 au diamètre du cercle, il est clair que, même en suivant cette voie, on ne pourra jamais carrer une portion quelconque du cercle, et on ne parviendra qu'à déterminer le rapport entre le demi-cercle et le carré construit sur son diamètre, qu'on exprime aujourd'hui par le nombre $\frac{\pi}{8}$, et qui est évidemment la moitié du rapport entre le quart de cercle et le carré construit sur son rayon. Et c'est justement parce que le rapport qu'on peut

En disant qu'en suivant son parcours, Wallis ne peut que parvenir à la détermination du rapport constant entre le quart du cercle et le carré construit sur son rayon — qui est évidemment égal au rapport entre le cercle et le carré construit sur son diamètre —, je ne veux pas dire qu'il cherche une sorte d'approximation d'un nombre irrationnel donné, le nombre que nous identifions aujourd'hui avec $\frac{\pi}{4}$. Wallis n'a en fait nullement établit *a priori* l'existence et la nature d'un tel nombre. Tout ce que l'égalité (44) lui dit, indépendamment de toute considération géométrique qui pouvait l'amener à cette même conclusion, est que le rapport entre un cercle de rayon r et le carré construit sur le diamètre de ce cercle ne dépend pas de ce diamètre. Comme autant ce cercle que le carré construit sur son diamètre sont des grandeurs déterminées, ceci peut tout au plus suggérer à Wallis que, quel que soit le segment r, la proportion

$$C(r) : Q(2r) = 1 : x_C \tag{46}$$

où $C(r)$ et $Q(2r)$ sont respectivement le cercle de rayon r et le carré de côté $2r$, admette une quatrième proportionnelle déterminé qui ne dépend pas de r. Il n'est pourtant nullement acquis pour Wallis que ce rapport puisse être exprimé par un nombre, et encore moins par un nombre dont on connaît la nature.

Réduite à son *definiens*, conformément à la définition V.5 des *Éléments*, la proportion (46) nous assure que, quel que soient les nombres entiers positifs n et m,

$$[nC(r)mQ(2r)] \Rightarrow [n > mx_C] \tag{47}$$

ou bien

$$\begin{aligned}
\left[C(r) < \frac{m}{n}Q(2r)\right] &\Rightarrow \left[1 < \frac{m}{n}x_C\right] \\
\left[C(r) = \frac{m}{n}Q(2r)\right] &\Rightarrow \left[1 = \frac{m}{n}x_C\right] \\
\left[C(r) > \frac{m}{n}Q(2r)\right] &\Rightarrow \left[1 > \frac{m}{n}x_C\right]
\end{aligned} \tag{48}$$

Rien ne nous assure cependant que $C(r)$ et $Q(2r)$ aient une mesure commune, c'est-à-dire qu'il existe un couple de nombres entiers positifs n' et m' tels que $C(r) = \frac{m'}{n'}Q(2r)$ et donc $x_C = \frac{n'}{m'}$.

Supposer que la proportion (46) admet une quatrième proportionnelle déterminé revient donc à supposer que (quel que soit le segment r), les relations géométriques parmi les grandeurs $C(r)$ et $Q(2r)$ sont parfaitement reflétées par des relations arithmétiques entre l'unité numérique et un autre objet déterminé, qu'on a dénoté ici par le symbole "x_C", qu'on peut multiplier par un nombre fractionnaire positif quelconque $\frac{m}{n}$, en obtenant le produit $\frac{m}{n}x_C$ qui est censé être comparable avec l'unité numérique. Le problème de Wallis est donc celui de déterminer d'un tel objet inconnu et hypothétique et, si possible de l'exprimer par des moyens arithmétiques connus.

* * *

déterminer en suivant ce parcours ne saurait être que la moitié du rapport entre le quart de cercle et le carré construit sur son rayon [cf. Wallis (1656*b*), prop. CLXVII 134-135] que Wallis concentre ses efforts sur la recherche du deuxième de ces rapports.

Ces précisions étant faites, revenons au parcours de Wallis. Tout de suite après avoir énoncé l'égalité (38), celui-ci observe que le membre de droite de cette égalité est parfaitement déterminé, et peut être aisément calculé, même si n n'est pas un nombre entier positif, mais plutôt une fraction quelconque (positive) de l'unité. Il reste à s'assurer que cette substitution conserve l'égalité avec le rapport exprimé par le premier membre. C'est ce que Wallis fait en se réclamant d'une nouvelle induction, qui fournit l'égalité[55] :

$$\frac{\left(U_{\frac{1}{\lambda}} - \sum_{\frac{1}{\lambda}}\right)^p}{U_{\frac{p}{\lambda}}} = \prod_{i=1}^{p} \frac{i}{i+\lambda} \tag{49}$$

où λ est un nombre entier positif quelconque plus grand que zéro. Cette égalité étant donnée, il est aisé d'observer qu'en faisant varier les indices entiers λ et p, à partir de 1, on obtient, comme valeurs du rapport $\frac{\left(U_{\frac{1}{\lambda}} - \sum_{\frac{1}{\lambda}}\right)^p}{U_{\frac{p}{\lambda}}}$, les inverses des nombres triangulaires plus grands que 1 de tous les ordres supérieurs à 0 : si $\lambda = 1$, les valeurs successives de p nous donnent les inverses de tous les nombres entiers plus grand que 1, qu'on peut considérer comme des nombres triangulaires d'ordre 1 ; si $\lambda = 2$, les valeurs successives de p nous donnent les inverses de tous les nombres triangulaires plans plus grands que 1 — $3, 6, 10, 15, \dots$ —, résultant des sommes réitérées des nombres entiers positifs ; si $\lambda = 3$, les valeurs successives de p nous donnent les inverses de tous les nombres pyramidaux, ou triangulaires solides, plus grands que 1 — $4, 10, 20, 35, \dots$ —, résultant des sommes réitérées des nombres triangulaires plans ; si $\lambda = 4$, les valeurs successives de p nous donnent les inverses de tous les nombres triangulaires plus grands que 1 d'ordre 4 — $5, 15, 35, 70, \dots$ —, résultant des sommes réitérées des nombres triangulaires solides ; etc. Wallis reconnaît ce fait d'emblée[56]. Il qualifie les nombres triangulaire de tous les ordres de "nombres figurés", c'est-à-dire, respectivement, de "latéraux", "triangulaires", "pyramidaux", "triangupyramidaux", etc. En ajoutant à chacune des successions précédentes le terme initial 1, et à toutes ces successions la succession des nombres triangulaires d'ordre 0, ou, comme dit Wallis, la succession des nombres figurés "monadiques" — $1, 1, 1, 1, \dots$ —, correspondant à la position $\lambda = 0$ dans le deuxième membre de l'égalité (49), on parvient à ranger les différentes valeurs du rapport $\prod_{i=1}^{p} \frac{i+\lambda}{i}$ (auquel on peut assigner la valeur 1, pour $p = 0$) dans une matrice carrée, dans laquelle on reconnaît le triangle de Tartaglia ou de Pascal :

$$\begin{array}{c|ccccccc}
 \quad\quad p+1 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \dots \\
\lambda+1 \quad\quad & & & & & & & \\
\hline
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots \\
2 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \dots \\
3 & 1 & 3 & 6 & 10 & 15 & 21 & \dots \\
4 & 1 & 4 & 10 & 20 & 35 & 56 & \dots \\
5 & 1 & 5 & 15 & 35 & 70 & 126 & \dots \\
6 & 1 & 6 & 21 & 56 & 126 & 252 & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots
\end{array} \tag{50}$$

[55] Cf. Wallis (1656*b*), prop. CXXVIII, 99-100 et CXXX-CXXXI, 102-104.
[56] Cf. Wallis (1656*b*), prop. CXXXI, scolie, 104 et CLXIX, 136-137.

D'après l'égalité (49) les entrées de cette matrice donnent les réciproques des différentes valeurs du rapport $\frac{\left(U_{\frac{1}{\lambda}}-\sum_{\frac{1}{\lambda}}\right)^p}{U_{\frac{p}{\lambda}}}$ (auquel on peut assigner la valeur 1, pour $\lambda = 0$).

Bien qu'il ne cite ni Tartaglia, ni Pascal, qui avaient étudié auparavant cette matrice[57], Wallis ne manque pas de reconnaître autant sa symétrie[58], que la simple loi de formation de ses entrées[59].

Pour suivre l'argument de Wallis à partir de ce point, sans se perdre dans des trop longues descriptions, il convient de noter l'entrée de la matrice (50) correspondant à la ligne $\lambda + 1 = \mu$ et à la colonne $p + 1 = \nu$ par le symbole "$F_{[\mu,\nu]}$", où μ et ν sont deux nombres entiers positifs quelconques[60], de sorte à réécrire l'égalité (49) ainsi :

$$\frac{\left(U_{\frac{1}{\lambda}} - \sum_{\frac{1}{\lambda}}\right)^p}{U_{\frac{p}{\lambda}}} = \frac{1}{F_{[\lambda+1,p+1]}} \tag{51}$$

Le rapport qui apparaît dans le membre de gauche de cette égalité se réduit au rapport $\frac{(U_2-\sum_2)^{\frac{1}{2}}}{U_1}$, que l'égalité (44) nous dit être égal au rapport cherché $\frac{\mathsf{ABC}}{\mathsf{ABCD}}$, pour la simple position $\lambda = p = \frac{1}{2}$:

$$\frac{\left(U_{\frac{1}{1/2}} - \sum_{\frac{1}{1/2}}\right)^{\frac{1}{2}}}{U_{\frac{1/2}{1/2}}} = \frac{(U_2 - \sum_2)^{\frac{1}{2}}}{U_1} \tag{52}$$

Selon Wallis, celle-ci est une prémisse suffisante pour passer de l'égalité (51) à l'égalité :

$$\frac{\mathsf{ABC}}{\mathsf{ABCD}} = \frac{1}{F_{[\frac{3}{2},\frac{3}{2}]}} \tag{53}$$

où le symbole "$F_{[\frac{3}{2},\frac{3}{2}]}$" — qui n'est naturellement pas de Wallis — indique l'entrée correspondante à la ligne $\lambda + 1 = \frac{3}{2}$ et à la colonne $p + 1 = \frac{3}{2}$ d'une matrice qui résulte de la matrice (50) par une double interpolation consistant dans l'introduction d'une ligne et d'une colonne intermédiaires, respectivement entre chaque deux lignes et chaque deux colonnes successives de cette matrice[61]. En d'autres termes, Wallis nous dit que si, en exploitant les propriétés structurelles

[57]Cf. respectivement Tartaglia (1556), livre II, ch. XXI, 69-74 et Pascal (1665). Quant au traité de Pascal, on sait qu'il fut imprimé en 1654 (long temps après sa composition), mais qu'il ne fut publié qu'en 1665, après la mort de son auteur. Il est donc naturel de penser que Wallis n'ait pas été au courant des résultats de Pascal.

[58]Cf. Wallis (1656*b*), prop. CXXXI, scolie 104.

[59]Cf. Wallis (1656*b*), prop. CXXXII, 104-106.

[60]On sait que ces entrées ne sont rien d'autre que les coefficients binomiaux. Pour rester proche de la démarche de Wallis, je préfère pourtant employer ici un symbole qui évoque explicitement la notion de nombre figuré, plutôt que celle de coefficient d'un développement binomial.

[61]Cf. Wallis (1656*b*), prop. CLXV-CLXIX, 128-137. Pour cette reconstruction de l'argument de Wallis, cf. Scott (1938), 532 et Whiteside (1960-1962), 238.

de la matrice (50), on parvient à remplir les places vides dans la matrice

$$
\begin{array}{cc|cccccc|c}
 & {\scriptstyle 2p+1} & {\scriptstyle 0} & {\scriptstyle 1} & {\scriptstyle 2} & {\scriptstyle 3} & {\scriptstyle 4} & {\scriptstyle \dots} & {\scriptstyle j=1,\dots} \\
{\scriptstyle 2\lambda+1} & & & & & & & & \downarrow \\
\hline
{\scriptstyle 0} & & ? & ? & ? & ? & ? & \dots & F_{[\frac{1}{2},\frac{j}{2}]} \\
{\scriptstyle 1} & & ? & 1 & ? & 1 & ? & \dots & F_{[1,\frac{j}{2}]} \\
{\scriptstyle 2} & & ? & ? & ? & ? & ? & \dots & F_{[\frac{3}{2},\frac{j}{2}]} \\
{\scriptstyle 3} & & ? & 1 & ? & 2 & ? & \dots & F_{[2,\frac{j}{2}]} \\
{\scriptstyle 4} & & ? & ? & ? & ? & ? & \dots & F_{[\frac{5}{2},\frac{j}{2}]} \\
\vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
\hline
{\scriptstyle i=1,\dots} & \longrightarrow & F_{[\frac{i}{2},\frac{1}{2}]} & F_{[\frac{i}{2},1]} & F_{[\frac{i}{2},\frac{3}{2}]} & F_{[\frac{i}{2},2]} & F_{[\frac{i}{2},\frac{5}{2}]} & \dots & \ddots
\end{array}
\tag{54}
$$

qui est censé conserver ces mêmes propriétés structurelles, alors on trouve, au croisement de la ligne $2\lambda + 1 = 2$ et de la colonne $2p + 1 = 2$, le réciproque du rapport cherché entre le quart de cercle et le carré construit sur son rayon.

* * *

Si on considère cette conclusion comme un théorème qui justifie la suite du parcours de Wallis (ce que la proposition CLXVIII du traité de Wallis nous incite à faire[62]), alors la preuve de ce théorème suppose deux lemmes que Wallis est loin d'avoir démontré. D'abord elle suppose que les deux membres de l'égalité (51) — et non seulement celui de gauche — possèdent un sens lorsqu'on substitue en même temps aux deux indices $\lambda + 1$ et $p + 1$ les nombres fractionnaires $\frac{2i+1}{2}$ $(i = 0, 1, 2, \ldots)$; en employant une terminologie aujourd'hui habituelle, cela peut se dire ainsi : cette inférence suppose qu'existent les entités dénotées par les symboles "$F_{[\frac{2i+1}{2},\frac{2j+1}{2}]}$" $(i, j = 0, 1, 2, ...)$. Ensuite cette preuve suppose que l'égalité (51) est conservée lorsqu'on pose $\lambda = p = \frac{1}{2}$.

Si ces deux lemmes sont concédés, l'argument de Wallis conduit à réduire le problème de la détermination du rapport entre le quart de cercle et le carré construit sur son rayon au problème de l'interpolation de la matrice (50), c'est-à-dire au problème du remplissage des places vides de la matrice (54). Wallis n'est pourtant pas dans les conditions de démontrer (ni même de justifier inductivement) ni l'un ni l'autre de ces lemmes. La raison en est claire : il n'a aucune peur formuler en termes précis la condition d'existence énoncée par le premier lemme. Ce lemme nous apparaît clair aujourd'hui, car subrepticement nous le reformulons ainsi : il existe des nombres réels qu'on peut identifier avec les nombres $F_{[\frac{2i+1}{2},\frac{2j+1}{2}]}$. Et prouver ceci se réduit pour nous à prouver que l'ensemble des nombre réels est fermé par rapport aux opérations qui conduisent des entrées de la matrice (50) aux entrées de la matrice (54) complétée dans toutes ses places, c'est-à-dire que si ces opérations sont appliquées à des nombres réels, alors elles

[62]Cf. Wallis (1656*b*), 135 : "[...] Circulus ad quadratum diametri, est ut 1 ad $\square$, numerum nempe inter 1 & 2 interponendum in serie diagonalium $1, 2, 6, 20, 70, \&c.$ tabelle prop. 32." Le "tableau" donnée dans la prop. 32 (ou XXXII, pour être plus précis) est évidemment la matrice (50). Le symbole "$\square$", qui est introduit par Wallis lors de la proposition précédente, fonctionne ici comme une lettre indiquant une inconnue dans une équation : il dénote le réciproque du rapport inconnu entre le quart du cercle et le rayon construit sur son rayon.

ne peuvent que produire d'autres nombres réels. C'est exactement ce que Wallis ne peut pas prouver, car, faute de toute notion analogue à notre notion de nombre réel, il ne peut pas énoncer et penser son lemme de cette manière. Tout ce que Wallis peut supposer, mais évidemment pas prouver, est que si l'objet hypothétique $F_{[\frac{3}{2},\frac{3}{2}]}$ pouvait de quelques manières que ce soit être déterminé, alors il coïnciderait avec l'objet hypothétique x_C satisfaisant la proportion (46). Les égalités (44) et (51) étant données, celle-ci est au fond une manière d'énoncer le deuxième lemme, et c'est même la seule manière à la disposition de Wallis pour énoncer ce lemme.

On comprendra alors que — sauf si on veut faire dépendre la démarche de Wallis d'une foi métaphysique dans une existence transcendante des objets mathématiques, révélée aux hommes par des signaux que le mathématicien sait décrypter — cette démarche ne peut (en dépit de la nature assertive de la proposition CLXVIII) guère être conçue comme une preuve qui conduit d'un théorème établi à un autre théorème. C'est plutôt une démarche hypothétique, ou si on préfère analytique, que l'on pourrait résumer ainsi : d'abord Wallis avance l'hypothèse que la proportion (46) peut convenir pour un objet x_C dont même la nature reste inconnue ; ensuite il parvient, par des justifications positives (encore que largement fondées sur la pratique de l'induction) aux égalités (44) et (51) ; à partir de là, il suppose que l'objet hypothétique x_C coïncide avec l'objet hypothétique $F_{[\frac{3}{2},\frac{3}{2}]}$; ceci lui permet de chercher à déterminer cet objet par des démarches purement arithmétiques visant une interpolation d'une matrice de nombres triangulaires (dite aujourd'hui "triangle de Pascal") ; ces dernières démarches ayant abouti sinon à l'exhibition d'un objet déjà connu qu'on peut reconnaître comme l'objet $F_{[\frac{3}{2},\frac{3}{2}]}$ qui était cherché, au moins à la détermination de conditions arithmétiques plus explicites que celle fixée par la définition même de $F_{[\frac{3}{2},\frac{3}{2}]}$, auxquelles un tel objet est censé satisfaire, il pourra enfin espérer de pouvoir vérifier, *a posteriori* (lors d'une sorte de synthèse affaiblie) qu'un objet qui satisfait à ces conditions satisfait aussi à la proportion (46). C'est l'avant dernière étape de ce parcours qu'il faut exposer maintenant.

* * *

Une première interpolation de la matrice (50) n'est pas difficile à obtenir. Il suffit d'exprimer le rapport entre un nombre triangulaire d'un ordre donné et son côté l en termes de l, d'opérer dans ce rapport la substitution $l \to l+\frac{1}{2}$, et de multiplier le résultat ainsi obtenu par $l+\frac{1}{2}$, ce qui équivaut à opérer directement la substitution $l \to l+\frac{1}{2}$ dans les expressions des nombres figurés en termes de leur côté l. Wallis aurait pu faire ceci d'un seul trait, en observant que pour tout nombre entier μ strictement positif et tout nombre entier ν plus grand que 1, on a

$$F_{[\mu,\nu]} = F_{[\nu,\mu]} = \prod_{i=1}^{\nu-1} \frac{\mu+i-1}{i} = \frac{\mu\,(\mu+1)\,(\mu+2)\ldots(\mu+\nu-2)}{(\nu-1)!} \tag{55}$$

et en opérant la substitution indiquée directement sur cette expression. Il n'exploite pourtant pas cette possibilité. Il considère plutôt, les unes après les autres, les successions des nombres triangulaires des ordres $2, 3, 4, 5$; il détermine les formes générales des termes de ces successions — $\frac{l(l+1)\ldots(l+\lambda)}{\lambda!}$ $(\lambda = 2, 3, 4, 5)$ — ; il tire de là les valeurs des nombres triangulaires intermédiaires de ces ordres ; et il généralise ensuite les résultats ainsi obtenus aux nombres triangulaires de tous les ordres. Cette démarche se poursuit au cours de plusieurs propositions[63] . Wallis parvient enfin à la conclusion suivante :

$$F_{[\nu, j+\frac{1}{2}]} = F_{[j+\frac{1}{2}, \nu]} = \frac{\left(j+\frac{1}{2}\right)\left(j+\frac{3}{2}\right)\left(j+\frac{5}{2}\right)\ldots\left(j+\nu-\frac{3}{2}\right)}{(\nu-1)!} \tag{56}$$

où j et ν sont deux nombres entiers positifs quelconques, dont le deuxième est plus grand que 1. De là, en observant que, quel que soit μ, $F_{[\mu,1]} = F_{[1,\mu]} = 1$ et en posant donc $F_{[1,j+\frac{1}{2}]} = F_{[j+\frac{1}{2},1]} = 1$ pour tout j, on obtient la matrice suivante :

$$\begin{array}{cc|cccccc|c}
 & 2p+1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & \ldots & j=1,\ldots \\
2\lambda+1 & & & & & & & & \downarrow \\
\hline
0 & & ? & 1 & ? & \frac{1}{2} & ? & \ldots & F_{[\frac{1}{2},\frac{j}{2}]} \\
1 & & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \ldots & F_{[1,\frac{j}{2}]} \\
2 & & ? & 1 & ? & \frac{3}{2} & ? & \ldots & F_{[\frac{3}{2},\frac{j}{2}]} \\
3 & & \frac{1}{2} & 1 & \frac{3}{2} & 2 & \frac{5}{2} & \ldots & F_{[2,\frac{j}{2}]} \\
4 & & ? & 1 & ? & \frac{5}{2} & ? & \ldots & F_{[\frac{5}{2},\frac{j}{2}]} \\
\vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
\hline
i=1,\ldots & \rightarrow & F_{[\frac{i}{2},\frac{1}{2}]} & F_{[\frac{i}{2},1]} & F_{[\frac{i}{2},\frac{3}{2}]} & F_{[\frac{i}{2},2]} & F_{[\frac{i}{2},\frac{5}{2}]} & \ldots & \ddots
\end{array} \tag{57}$$

qui résulte d'un remplissage partiel des places vides dans la matrice (54)

Il reste à remplir les places vides de la matrice (57), ce qui demande une deuxième interpolation.

Quelle que soit la manière dont on les considère, les expressions des différents nombres triangulaires en termes de leurs côtés, ne peuvent pas aider pour parvenir à cette deuxième interpolation, car il n'est pas possible de substituer dans ces formules aussi bien le nombre entier qui exprime l'ordre du nombre triangulaire que celui qui en exprime le côté par des nombres fractionnaires. Donc, si Wallis ne veut pas retourner à la considération des rapports $\frac{\left(U_{\frac{1}{\lambda}} - \sum_{\frac{1}{\lambda}}\right)^p}{U_{\frac{p}{\lambda}}}$ (ce qui rendrait inutile la démarche précédente), il n'a autre possibilité que de considérer des propriétés structurelles de la matrice (57), c'est-à-dire les relations qui lient entre eux les différents termes connus de cette matrice.

Pour ce faire, il observe d'abord[64] que la loi de formation des termes de la matrice (50) et la procédure qui conduit à sa première interpolation sont telles que tous les termes connus de la matrice (57) qui n'appartiennent ni à ses deux premières lignes, ni à ses deux premières colonnes sont liés aux termes connus appartenant à ces lignes et colonnes par la simple règle récursive suivante :

$$F_{[\frac{k+1}{2},\frac{j}{2}]} = F_{[\frac{j}{2},\frac{k+1}{2}]} = \left(\frac{j+k-3}{j-2}\right) F_{[\frac{k+1}{2},\frac{j}{2}-1]} = \left(\frac{j+k-3}{j-2}\right) F_{[\frac{j}{2}-1,\frac{k+1}{2}]} \tag{58}$$

[63] Cf. Wallis (1656*b*), prop.CLXIX-CLXXXV, 136-165.
[64] Cf. Wallis (1656*b*), prop.CLXXXVII-CLXXXVII, 167-169.

où k est un nombre entier positif quelconque dénotant la ligne ou la colonne de la matrice (57) à laquelle appartiennent les termes $F_{[\frac{k+1}{2},\frac{j}{2}]}$ et $F_{[\frac{j}{2},\frac{k+1}{2}]}$, j est un nombre entier positif plus grand que 2 indiquant le poste de ces termes dans la ligne ou la colonne à laquelle ils appartiennent, et ces nombres sont tels que ou bien $\frac{k+1}{2}$ ou bien $\frac{j}{2}$ est un entier. Cela signifie qu'il suffit de connaître les termes des deux premières lignes ou ceux de deux premières colonnes de cette matrice pour en tirer tous les autres par la plus simple des règles récursives. Si on suppose alors que cette règle vaut pour tous les termes qui sont censés entrer dans la matrice (57), c'est-à-dire qu'elle vaut quels que soient les nombres entiers positifs k et j, pourvu que $j > 2$, alors il suffit de connaître un seul des termes qui remplissent les places vides d'une telle matrice, pour pouvoir en tirer tous les autres.

Ainsi, si en suivant Wallis, on pose[65] $F_{[\frac{3}{2},\frac{3}{2}]} = \square$, la règle (58) nous permet de remplir toute les places vides de la matrice (57) par des termes de la forme $\frac{n}{m}\square$, n et m étant des nombres entiers positifs[66] :

$$
\begin{array}{cc|cccccc|c}
 & 2p+1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & \ldots & j=1,\ldots \\
2\lambda+1 & & & & & & & & \downarrow \\
\hline
0 & & \frac{1}{0}\square & 1 & \frac{1}{2}\square & \frac{1}{2} & \frac{1}{3}\square & \ldots & F_{[\frac{1}{2},\frac{j}{2}]} \\
1 & & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \ldots & F_{[1,\frac{j}{2}]} \\
2 & & \frac{1}{2}\square & 1 & \square & \frac{3}{2} & \frac{4}{3}\square & \ldots & F_{[\frac{3}{2},\frac{j}{2}]} \\
3 & & \frac{1}{2} & 1 & \frac{3}{2} & 2 & \frac{5}{2} & \ldots & F_{[2,\frac{j}{2}]} \\
4 & & \frac{1}{3}\square & 1 & \frac{4}{3}\square & \frac{5}{2} & \frac{8}{3}\square & \ldots & F_{[\frac{5}{2},\frac{j}{2}]} \\
\vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
\hline
i=1,\ldots & \longrightarrow & F_{[\frac{i}{2},\frac{1}{2}]} & F_{[\frac{i}{2},1]} & F_{[\frac{i}{2},\frac{3}{2}]} & F_{[\frac{i}{2},2]} & F_{[\frac{i}{2},\frac{5}{2}]} & \ldots & \ddots
\end{array}
\tag{59}
$$

Il s'ensuit que si la règle (58), prise en tant que telle, n'aide guère Wallis à déterminer le rapport cherché, elle permet au moins d'établir des relations que tous les termes de la matrice (59), et donc aussi $F_{[\frac{3}{2},\frac{3}{2}]}$, doivent respecter. Cette règle exhibe des nouveaux objets arithmétiques qui vont devenir désormais les objets de la réflexion de Wallis ; ce sont les facteurs $\frac{j+k-3}{j-2}$ ($k = 0, 1, 2\ldots$; $j = 3, 4, 5, \ldots$), qui lient chaque terme de cette matrice au terme qui apparaît deux places plus loin dans la même ligne ou dans la même colonne.

En particulier, Wallis cherche à comprendre[67] si parmi les lignes ou les colonnes de place paire et les lignes ou les colonnes de place impaire dans la matrice (59) il y a une différence structurelle — c'est-à-dire une différence qui ne tient qu'aux relations qu'ont entre eux les différents termes de ces lignes ou colonnes — qui puisse expliquer pourquoi l'interpolation complète des premières est plus aisée que l'interpolation complète des deuxièmes. Pour ce faire, il considère les facteurs $\frac{j+k-3}{j-2}$ et il montre que les facteurs $\frac{j+k-3}{j-2}$ qui lient entre eux les termes de place paire dans les lignes ou colonnes de place paire ont, avec les facteurs $\frac{j+k-3}{j-2}$ qui lient entre eux les termes de place impaire dans ces mêmes lignes ou colonnes une relation que les facteurs $\frac{j+k-3}{j-2}$ qui lient entre eux les

[65] Cf. la note (62), ci-dessus.
[66] Cf. Wallis (1656*b*), prop. CLXXXIX, 169-170.
[67] Cf. Wallis (1656*b*), prop. CLXXXX, 170-178.

termes de place paire dans les lignes ou colonnes de place impaire n'ont pas avec les facteurs $\frac{j+k-3}{j-2}$ qui lient entre eux les termes de place impaire dans ces mêmes lignes ou colonnes.

En effet, si dans $\frac{j+k-3}{j-2}$ on pose $k = 2\kappa + 1$ ($\kappa = 0, 1, 2, \ldots$) — ce qui indique qu'on considère des lignes ou des colonnes de place paire —, on obtient $\frac{j+2\kappa-2}{j-2}$ ($\kappa = 0, 1, 2, \ldots$) ; si $\kappa > 0$, ce facteur est donc donné par le rapport de deux nombres entiers positifs plus grands que 0 (car $j > 2$), dont la différence est 2κ, c'est-à-dire qu'il résulte du produit de 2κ facteurs tels que $\frac{n+1}{n}$:

$$(k = 2\kappa + 1) \Rightarrow \left(\frac{j+k-3}{j-2} = \frac{j+2\kappa-2}{j-2} = \prod_{i=j-2}^{j+2\kappa-3} \frac{i+1}{i} \right) \tag{60}$$

On peut donc écrire ce facteur comme le produit de deux autres produits dont chacun a κ facteurs, respectivement de la forme $\frac{2n}{2n-1}$ et $\frac{2n+1}{2n}$:

$$(k = 2\kappa + 1) \Rightarrow \left[\begin{array}{cl} \dfrac{j+k-3}{j-2} & = \dfrac{j+2\kappa-2}{j-2} \\ & = \left(\displaystyle\prod_{i=0}^{\kappa-1} \frac{j+2i-1}{j+2i-2} \right) \left(\displaystyle\prod_{i=0}^{\kappa-1} \frac{j+2i}{j+2i-1} \right) \end{array} \right] \tag{61}$$

Comme la substitution $j \to j+1$ transforme $\frac{j+2i-1}{j+2i-2}$ en $\frac{j+2i}{j+2i-1}$, il s'ensuit que, quel que soit j ($j = 3, 4, 5, \ldots$), le facteur $\frac{j+k-3}{j-2}$ peut être exprimé comme un produit de deux facteurs tels que $\left(\prod_{i=0}^{\kappa-1} \frac{j-1+2i}{j-2+2i} \right)$ et $\left(\prod_{i=0}^{\kappa-1} \frac{j+2i}{j-1+2i} \right)$, dont le deuxième est aussi un facteur de $\frac{j+k-3}{j-2}$ pour la valeur successive de j.

Ceci n'a pas lieu pour les lignes ou les colonnes de place impaire. Si dans $\frac{j+k-3}{j-2}$ on pose $k = 2\kappa$ ($\kappa = 0, 1, 2, \ldots$), ce facteur devient égal à $\frac{j+2\kappa-3}{j-2}$ ($\kappa = 0, 1, 2, \ldots$), de sorte que si $\kappa > 0$, il est donné par le rapport de deux nombres entiers positifs plus grands que 0, dont la différence est $2\kappa - 1$. Ce facteur résulte ainsi du produit de $2\kappa - 1$ facteurs, tels que $\frac{n+1}{n}$, et ces facteurs, étant en nombre impair, ne peuvent pas être partagés en deux classes dont chacune a le même nombre d'éléments.

Imaginons maintenant de considérer les troisièmes termes des lignes ou colonnes de place paire à partir de la quatrième, $F_{\kappa+1,\frac{3}{2}} = F_{\frac{3}{2},\kappa+1}$ ($\kappa = 1, 2, 3, \ldots$). D'après l'égalité (58), ces termes dérivent des premiers termes de ces lignes ou colonnes selon la formule :

$$F_{\kappa+1,\frac{3}{2}} = F_{\frac{3}{2},\kappa+1} = (2\kappa+1)\, F_{\kappa+1,\frac{1}{2}} = (2\kappa+1)\, F_{\frac{1}{2},\kappa+1} \tag{62}$$

Comme dans cette formule le facteur $2\kappa + 1$ n'est rien que la valeur du facteur $\frac{j+k-3}{j-2}$ pour les positions $k = 2\kappa + 1$ et $j = 3$, l'égalité (61) nous suggère d'exprimer ce facteur comme un produit de deux facteurs dont chacun est à son tour un produit de κ facteurs respectivement de la forme $\frac{2n}{2n-1}$ et $\frac{2n+1}{2n}$:

$$2\kappa + 1 = \left(\prod_{i=0}^{\kappa-1} \frac{2+2i}{1+2i} \right) \left(\prod_{i=0}^{\kappa-1} \frac{3+2i}{2+2i} \right) \tag{63}$$

Or, comme on l'a vu en général, le deuxième de ces facteurs, $\left(\prod_{i=0}^{\kappa-1} \frac{3+2i}{2+2i} \right)$, entre aussi dans l'expression analogue du facteur $\frac{j+k-3}{j-2}$ pour $j = 4$. Considérons en revanche le premier de ces facteurs. Il est facile de vérifier qu'en divisant par ce facteur les deuxièmes termes de chaque ligne ou colonne (qui sont donnés toujours par le nombre 1), on obtient les premiers termes de ces lignes ou colonnes :

$$F_{\kappa+1,\frac{1}{2}} = \frac{1}{\prod_{i=0}^{\kappa-1} \frac{2+2i}{1+2i}} = \prod_{i=0}^{\kappa-1} \frac{1+2i}{2+2i} \tag{64}$$

De là, en appliquant l'égalité (57), il est ensuite facile de retrouver tous les termes (autant de place paire qu'impaire) des lignes ou colonnes de place paires.

Or, il est clair que l'égalité (64) n'est rien qu'une reformulation de l'égalité (56), car

$$\begin{aligned} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{5}{2}\right)\ldots\left(\kappa-\frac{1}{2}\right)}{\kappa!} &= \frac{1\times 3\times 5\times\ldots\times 2\kappa-1}{(1\times 2)(2\times 2)(3\times 2)\ldots(\kappa\times 2)} \\ &= \prod_{i=0}^{\kappa-1}\frac{1+2i}{2+2i} \end{aligned} \tag{65}$$

Ce qui semble importer à Wallis est pourtant que l'égalité (64) est désormais dérivée non pas de la règle de formation des nombres triangulaires des différents ordres, mais de la considération des propriétés structurelles de la matrice (50). Cette matrice manifeste donc, d'elle-même, une structure qui conduit à sa première interpolation. Dit en d'autres termes : en conjonction avec l'égalité (57), l'égalité (56) fournit une règle, qui est en tant que telle indépendante de la loi de formation des nombres triangulaires, qui permet de conduire à la première interpolation de cette matrice. Prises ensemble, ces égalités expriment en fait toutes les entrées des lignes et colonnes de place paire connues matrice (59) en termes des entrées de la matrice (50).

Le fait que l'argument qui nous a conduit à l'égalité (64) ne peut pas être répété pour les lignes ou colonnes de place impaire dans la matrice (59) suggère à Wallis que les termes de place impaire dans ces lignes ou colonnes ne sont pas liés aux termes de place paire par un lien algébrique. Voici ce que Wallis écrit :

> Et quidem proclivis sum ut credam (quod et ab initio suspicatus sum,) rationem illam quam quærimus talem esse quæ non poterit numeris exprimi juxta ullum adhuc receptum notationis modum, ne quidem per latera surda ; [...] ut necesse videatur alium ejusmodi rationem explicandi modum introducere, quam vel per numeros veros, vel etiam per latera surda[68].

S'il n'a certes pas fourni la preuve que le rapport entre le cercle et le carré construit sur son diamètre ne peut pas être exprimé par un nombre algébrique, et s'il est même loin d'affirmer que le nombre π est transcendant — car il ne dispose d'aucune notion analogue à celle du nombre réel π, et encore moins d'une notion analogue à celle de nombre transcendant —, Wallis semble ainsi persuadé que sa démarche lui donne le droit d'avancer une conjecture : le rapport entre le cercle et le rayon construit sur son diamètre ne peut pas être obtenu en composant les nombres entiers positifs selon les opérations algébriques connues.

[68] Cf. Wallis (1656*b*),prop. XLXXX, scolie, 174.

Cela n'est pas encore une raison pour conclure que la proportion (46) n'admet pas une quatrième proportionnelle. Si la matrice (59), avec ses propriétés structurelles que Wallis a su dévoiler, n'exhibe en fait aucun nombre déterminé dans lequel il soit possible de reconnaître cette quatrième proportionnelle, elle ne fournit, aux yeux de ce dernier, que des informations pouvant justifier une conclusion négative ; d'autres informations semblent au contraire rendre viable une conjecture positive, dont l'importance justifie qu'elle figure à la fin d'un traité aussi sophistiqué et novateur que l'*Arithmetica infinitorum* : s'il ne peut être exprimé ni par un nombre fractionnaire, ni par un radical, le rapport entre un cercle et le carré construit sur son rayon peut être être exprimée par le biais d'une nouvelle opération arithmétique, qu'il ne s'agit que de définir :

> Quoties autem hoc contingint, cum illud veris numeris designari non possit (& ne quidem solis radicibus surdis) quærendus erit modus aliquis id ipsum utcunque exprimendi. Si igitur ut $\surd : 3 \times 6$: significat *terminum medium inter* 3 *et* 6 *in progressione Geometrica æquabili* $3, 6, 12, \&c.$ (continue multiplicando $3 \times 2 \times 2\&c.$) ita $\mathcal{M} : 1 \mid \frac{3}{2}$: significet *terminum medium inter* 1 *&* $\frac{3}{2}$ *progressione Geometrica decrescente* $1, \frac{3}{2}, \frac{15}{8}, \&c.$ (continue multiplicando $1 \times \frac{3}{2} \times \frac{5}{4}\&c.$) erit $\Box = \mathcal{M} : 1 \mid \frac{3}{2}$: *Et propterea circulus est ad quadratum diametri, ut* 1 *ad* $\mathcal{M} : 1 \mid \frac{3}{2}$. Quæ quidem erit vera circuli quadratura in numeris, quatenus ipsa numerorum patitur, explicata[69].

Cela pourrait sembler un artifice, et ça l'est en partie. En effet le symbole "$\surd : 3 \times 6$" renvoie à un problème dont on sait exprimer la solution autrement que par ce même symbole : la raison de la progression géométrique $\{3, 6, 12, \ldots\}$ est 2 et si sa base est 3, alors son terme générique est 3×2^i, donc le terme intermédiaire entre 3 et 6 est $3 \times 2^{\frac{1}{2}} = 3\sqrt{2}$. Dans cette manière on a réduit le problème posé à un autre problème qu'on peut chercher à formuler et à résoudre de manière indépendante : le problème de déterminer un "nombre" x tel que $x^2 = 2$. Dans ce sens, le problème posé par le symbole "$\surd : 3 \times 6$" peut être dit résolu et non seulement posé. Mais il ne s'agit pas, au fond, d'une vraie solution, car l'équation $x^2 = 2$ pose elle-même un problème qui n'est pas résolu par la simple écriture du symbole "$\sqrt{2}$", qui n'est, au fond, comme le symbole "$\surd : 3 \times 6$", qu'une manière d'indiquer un problème. Wallis peut donc penser qu'un symbole comme "$\mathcal{M} : 1 \mid \frac{3}{2}$" n'est pas essentiellement distinct d'un symbole comme "$\surd : 3 \times 6$" ou même comme "$3\sqrt{2}$" : ces symboles expriment tous la conclusion de l'analyse, sans avancer en rien dans la synthèse. Si dans le dernier cas on a l'impression d'avoir avancé plus loin dans la solution du problème c'est seulement parce que la pratique arithmétique nous enseigne à manipuler et à combiner entre eux des signes tels que "$3\sqrt{2}$" ; celle-ci n'est pour autant pas encore une synthèse et rien ne nous empêche d'espérer qu'on puisse faire autant avec des signes tels que "$\mathcal{M} : 1 \mid \frac{3}{2}$"[70]. Au fond, Wallis lance donc

[69] Cf. Wallis (1656*b*), prop. CLXXXX, scolie, 175.

[70] Cf. Wallis (1656*b*), prop. CLXXXX, scolie, 176-177 : "Sicut autem notation numeri surdi (puta $\sqrt{2}$ &c.) in Arithmeticam introduxit methodum addendi, subducendi, multiplicandi, dividendi, &c. latera surda ; ita non erit difficile ejusmodi operationes novum hunc nostrum notationis modum applicare ; quod tamen præsentis instituti non est. Non ignoro interim ad hanc ipsam notationem accuratius perficiendam, apponendas esse notæ $\mathcal{M}$ distinctiones suas,

un appel aux développements futurs des mathématiques, et indique en même temps un programme de recherche.

Ce programme de recherche est d'autant plus prometteur que la seule voie qui aurait pu apparaître, à l'époque de Wallis, comme étant disponible pour avancer vers l'identification du "nombre" qui satisfait une équation comme $x^2 = 2$ — celle d'une approximation ou, du moins, d'une expression algébrique infinitaire — permet aussi d'avancer vers l'identification du "nombre" qui satisfait la condition $\mathcal{M} : 1 \mid \frac{3}{2}$. C'est la dernière étape du long parcours de Wallis[71].

Du fait que la succession

$$\left\{F_{[\frac{3}{2},1]} = 1, F_{[\frac{3}{2},2]} = \frac{3}{2}, F_{[\frac{3}{2},3]} = \frac{15}{8}, \dots\right\} \tag{66}$$

exhibée par la matrice (59) satisfait, quel que soit ν ($\nu = 2, 3, \ldots$), la condition

$$\frac{F_{[\frac{3}{2},\nu]}}{F_{[\frac{3}{2},\nu-1]}} > \frac{F_{[\frac{3}{2},\nu+1]}}{F_{[\frac{3}{2},\nu]}} \tag{67}$$

Wallis tire que la succession

$$\left\{F_{[\frac{3}{2},\frac{1}{2}]} = \frac{1}{2}\square, F_{[\frac{3}{2},1]} = 1, F_{[\frac{3}{2},\frac{3}{2}]} = \square, F_{[\frac{3}{2},2]} = \frac{3}{2}, \dots\right\} \tag{68}$$

dérivée de celle-ci par une interpolation ultérieure, doit satisfaire la même condition : les rapports entre chaque terme de cette succession et le précédent doivent former une succession décroissante. En posant, pour faire simple, $F_{[\frac{3}{2},\nu]} = \Phi_\nu$ et $F_{[\frac{3}{2},\frac{2\nu-1}{2}]} = \Psi_\nu$ ($\nu = 1, 2, 3, ...$), on obtient, quel que soit j ($j = 1, 2, ...$) les inégalités :

$$\frac{\Phi_{j+1}}{\Phi_j} < \left(\frac{\Psi_{j+1}}{\Phi_j}\right)^2 < \frac{\Psi_{j+1}}{\Psi_j} \tag{69}$$

c'est-à-dire :

$$\Phi_j\sqrt{\frac{\Phi_{j+1}}{\Phi_j}} < \Psi_{j+1} < \Phi_j\sqrt{\frac{\Psi_{j+1}}{\Psi_j}} \tag{70}$$

Donc, d'après l'égalité (58), on aura

$$\frac{(2j)(2j-2)(2j-4)\dots(4)}{(2j-1)(2j-3)\dots(3)}\square \begin{cases} > \dfrac{(2j-1)(2j-3)\dots(3)}{(2j-2)(2j-4)\dots(2)}\sqrt{\dfrac{2j+1}{2j}} \\ < \dfrac{(2j-1)(2j-3)\dots(3)}{(2j-2)(2j-4)\dots(2)}\sqrt{\dfrac{2j}{2j-1}} \end{cases} \tag{71}$$

c'est-à-dire :

$$\square \begin{cases} > \dfrac{(2j-1)^2(2j-3)^2\dots(3)^2}{(2j)(2j-2)^2(2j-4)^2\dots(2)}\sqrt{\dfrac{2j+1}{2j}} \\ < \dfrac{(2j-1)^2(2j-3)^2\dots(3)^2}{(2j)(2j-2)^2(2j-4)^2\dots(2)}\sqrt{\dfrac{2j}{2j-1}} \end{cases} \tag{72}$$

puta $\mathcal{M}^2$, $\mathcal{M}^3$, $\mathcal{M}^4$, &c, prout indicaverit vel medium unicum, vel primum duorum, trium, &c; [...]".

[71] Cf. Wallis (1656*b*), prop. CLXXXXI, 178-193.

Comme la différence des extrêmes qui encadrent $\square$ est de plus en plus petite au fur et à mesure que j augmente, c'est-à-dire que le rapport

$$\frac{\sqrt{\frac{2j}{2j-1}}}{\sqrt{\frac{2j+1}{2j}}} = \sqrt{\frac{4j^2}{4j^2-1}} \tag{73}$$

s'approche de plus en plus de 1 au fur et à mesure que j augmente, Wallis conclut que la fraction $\frac{3\times3\times5\times5\times7\times7\times\&c.}{2\times4\times4\times6\times6\times8\times\&c.}$, "in infinite continuatam esse ipsissimum quæsitum numerum $\square$ præcise"[72], c'est-à-dire :

$$\square = \prod_{i=1}^{\infty} \frac{(2i+1)^2}{(2i)(2i+2)} \tag{74}$$

où l'on reconnaît l'expression de π qu'aujourd'hui on fait justement remonter à Wallis.

* * *

C'est avec ce résultat (et son expression en termes de fractions continues[73]) que Wallis avait probablement clôturé son traité en 1655 ; les trois dernières propositions et le scolie final[74] furent probablement ajoutés l'année suivante[75]. Ces propositions visent à exprimer "*in lineis*"[76] les résultats principaux atteints dans ce traité. Du fait que la troisième colonne (ou la troisième ligne) de la matrice (59) est donnée par la succession

$$\left\{\frac{1}{2}\square, 1, \square, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}\square, \frac{15}{8}, \frac{8}{5}\square, \frac{35}{16}, \frac{64}{35}\square, \frac{315}{128}, \dots\right\} \tag{75}$$

Wallis conclut[77] que si une courbe est référée à un axe qui la coupe en un point donné, qu'on prend sur cet axe, et à partir de ce point, une famille de segments quelconques en progression arithmétique, disons les segments ia $(i = 1, 2, 3, ...)$, et que la courbe est telle que les parallèles à l'axe donné prises à partir des extrémités successives de ces segments coupent la courbe, en formant des segments respectivement égaux à a, $\frac{3}{2}a$, $\frac{15}{8}a$, $\frac{35}{16}a$, $\frac{315}{128}a, \dots$ (en constituant une succession d'ordonnées qui sont entre elles comme les termes de place paire dans la succession 75), alors l'ordonnée correspondante à a sera à l'ordonnée correspondante à $\frac{3}{2}a$, comme un cercle est au carré construit sur son diamètre. Et il ajoute[78] que de la matrice (59) on peut dériver une infinité d'autres propositions de ce type.

[72] Cf. Wallis (1656*b*), 180.
[73] Cf. Wallis (1656*b*), 181-193.
[74] Cf. Wallis (1656a), prop. CXCII-CXCIV, 193-198.
[75] Bien que la page de garde du traité de Wallis porte la date de 1656, le livre de Wallis a été imprimé dès l'été 1655 [cf. Scriba (1976), 148a]. La date de la page de garde se réfère probablement à la mise en circulation de l'ouvrage, après l'addition des trois propositions finales [cf. Wallis (1656*b*), prop. CXCII-CXCIV, 193-194], d'un scholium [*ibid.* 193-198] et d'un *post-scriptum* à la *Dedicatio* [*ibid.*, [13]-[14]] : cf. Newton (MP), I, 100, continuation de la note 23.
[76] Cf. Wallis (1656*b*), 200.
[77] Cf. Wallis (1656*b*), prop. CXCIII, 194.
[78] Cf. Wallis (1656*b*), prop. CXCIV, *scholium*, 194.

Il est clair que la courbe dont il est question, référée au système de coordonnées défini par Wallis est exprimée par une équation telle que $y = K\,[G(x)]$, où $G(x)$ est un segment tel que $G(ja) = F_{[\frac{3}{2},j]}a$ $(j = 1, 2, ...)$, quel que soit a.

La considération d'une courbe comme celle-ci est emblématique autant de l'exigence mathématique que Wallis semble ressentir face à la conclusion à laquelle il est arrivé, que de l'impasse dans lequel il se trouve. D'un côté Wallis ressent l'exigence de représenter son résultat par le biais d'une courbe, c'est-à-dire de l'interpréter autrement que comme la simple caractérisation d'un rapport constant. De l'autre il est incapable de caractériser sa courbe autrement que comme le résultat inconnu d'une interpolation continue ; et il est aussi incapable de se réclamer d'une autre courbe, dont les ordonnées représentent les quadratures successives des différentes portions d'un cercle. Pour généraliser son résultat, il ne sait qu'envisager la possibilité de carrer, selon la même procédure et en employant les mêmes outils mathématiques, des figures autres que le cercle, qu'il ne sait d'ailleurs pas déterminer d'une manière précise. Il n'est pourtant pas sans tirer de ce résultat un enseignement cruciale : le domaine des courbes géométriques de Descartes est trop étroit pour permettre de représenter "*in lineis*" la quadrature des courbes géométriques elles-mêmes ; en d'autres termes, ce domaine est ouvert par rapport à une opération de quadrature définie sur ces courbes. Dans le scolie final de son traité, il affirme en effet que les valeurs non rationnelles intervenant dans la matrice (59) "provenient [...] æquabiles curvæ et regulares (quales puta pro Geometricis agnosceret Cartesius)"[79].

3 Références bibliographiques

Baron, M. E. (1969) *The Origins of the Infinitesimal Calculus*, Pergamon Press, Oxford, 1969.

Cantor M. (1880-1908) *Vorlesugen über Geschichte des Mathematik*, B. G. Teubner, Leipzig, 1880-1908 (4 vols.).

Cavalieri B. (1653) *Geometria indivisibilium continuorum nova quadam ratione promota [...]*, C. Ferronii, Bononiæ, 1635.

Dhombres J. (1995) "L'innovation comme produit captif de la tradition : entre Apollonius et Descartes, une théorie des courbes chez Grégoire de Saint-Vincent", *in* Panza et Roero (1985), 13-83.

Gardies, J.-L. (1988) *L'héritage épistémologique d'Eudoxe de Cnide*, Vrin, Paris, 1988.

Giusti, E. (1980) *Bonaventura Cavalieri and the Theory of Indivisibles*, Ed. Cremonese, Roma, 1980.

Giusti, E. (1999) *Ipotesi sulla natura degli oggetti matematici*, Bollati-Boringhieri, Torino, 1999.

Grégoire de Saint Vincent (1647) *Opus geometricum quadraturæ circuli et sectionis coni decem libris comprehensum*, I & I Meursios, Antverpæ, 1647.

Houzel, C. (1978) "Fonctions elliptiques et intégrales abéliens", *in* J. Dieudonné (édité par), *Abregé d'hitsoire des mathématiques*, Hermann, Paris, 1978 (2 vols), nouv. éd. citée, 1986 (1 vol.), 293-314.

Lindemann, C. L. F. (1882) "Über die Zahl π", *Mathematische Annalen*, **20**, 1882, 213-225.

[79] Cf. Wallis (1656*b*), 196.

Newton, I (MP) *The Mathematical Papers of Isaac Newton*, ed. by T. D. Whiteside, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1967-1981 (8 voll.).

Panza (1995) "Da Wallis à Newton : una via verso il *calcolo*. Quadrature, serie e rappresentazioni infinite delle quantità e delle forme trascendenti", in Panza et Roero (1995), 131-219.

Pascal B. (1665) *Traité du triangle arithmétique avec quelques autres petits traitez sur la mesme matiere*, G. Desprez, Paris, 1665.

Prag, A. (1931) "John Wallis. 1616-1703. Zur Ideengeschichte der Matematik im 17. Jahrhundert", *Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik, Astronomie und Physik*, Abt. B, **1**, 1931, 381-412.

Sarasa, A. A, de (1649) *Solutio problematis A. R. P. Marino Mersenno Minimo propositi [...]*, I. & I. Meursios, Antperviæ, 1649.

Scott, J. F. (1938) *The Mathematical Work of John Wallis, D. D. F. R. S. (1616-1703)*, Chelsea, New York, 1938.

Scriba C. J. (1976) "Wallis, John", *Dictionary of Scientific Biography*, XIV, 1976, 146-155.

Tartaglia N. (1556) *La seconda parte de general trattato di numeri et mesure*, Curtio Troiano dei Navo, in Vinegia, 1556.

Torricelli, E. (OLV) *Opere de Evangelista Torricelli*, édité par G. Loria et G. Vassura, G. Montanari, Faenza, 1919 (vols. I-III) et F. Lega, Faenza, 1944 (vol. IV).

Wallis J. (1656*a*) *Operum Mathematicorum Pars Altera [...]*, Lichfield, Oxonii, 1656.

Wallis J. (1656*b*) *Arithmetica Infinitorum, Sive Nova Methodus Inquirendi in Curvilineorum Quadraturam, aliaque difficiliora Matheseos Problemata*, relié avec pagination séparée *in* Wallis (1656*a*).

Wallis J. (1685) *A Treatise of Algebra, both historical and practical [...]*, Playford, London, 1685.

Wallis J. (1693) *De Algebra tractatus historicus et praticus,* II$^{\text{ème}}$ volume de J. Wallis, *Opera mathematica*, e theatro Sheldoniano, Oxoniæ, 1693-1699 (3 vols.).

Whiteside, D. T. (1960-1962) "Patterns of Mathematical Thought in the later Seventeenth Century", *Archive for History of Exact Sciences*, **1**, 1960-1962, 179-388.