LE NOMBRE ET SON STATUT VERS LE MILIEU DU XIXᴱ SIECLE, A LA LUMIERE DE QUELQUES TRAITES

Jean-Claude PONT (Genève)

Au plan de l'épistémologie, l'une des contributions majeures du XIXe siècle au développement des mathématiques aura été le passage d'une épistémologie réaliste à une épistémologie formaliste, passage sensible et marqué aussi bien en algèbre, en analyse et en géométrie. Dans d'autres publications, j'ai parlé du passage du paradigme de l'évidence à celui de la consistance, mais la différence n'est qu'une question de langage [1]. Dans le domaine de l'algèbre et de l'arithmétique, qui nous occupent ici, un courant dans ce sens se perçoit dès le début du siècle. Il bénéficiera d'apports divers, parfois difficiles à séparer. Les années 1860-1870 marquent, pour les mathématiques, un tournant critique, dans les deux sens ordinaires de l'adjectif. Dans le sens où l'on dit d'un malade que son état est critique. Mais aussi dans le sens d'un examen évaluatif des fondements. La causalité de ce mouvement, qui se manifeste dans tous les grands domaines de la discipline, semble facile à établir. Les discussions autour de la renaissance de la géométrie non euclidienne, vers 1870, les perturbations profondes associées à l'émergence d'objets pathologiques en analyse, à la même période, allaient naturellement induire un examen interne, conduit par les savants eux-mêmes et cet examen, de par la nature du problème, se devait de toucher principalement l'épistémologie et la théorie de la connaissance [2]. Pourtant, dans plusieurs traités d'arithmétique des années 1860, et qui sont antérieurs aux deux crises mentionnées, on voit chez des mathématiciens de premier plan des préoccupations fondamentalistes qui en sont indépendantes [3]. Le but de cet article est de présenter et de commenter quelques travaux de cette époque relatifs aux fondements de l'arithmétique. A cause de leur intérêt pour la philosophie, de la place qu'elle tient dans leur formation et de la tourmente autour de l'hégélianisme, pour cette enquête sur le tournant critique des mathématiques dans la seconde moitié du XIXe siècle, les chercheurs germaniques sont des interlocuteurs privilégiés : Grassmann, Hermann et Robert, Hermann Hankel, Ernst Kossak, Ernst Schröder, Otto Stolz, Gottlob Frege [4].

§1. CONTEXTE

En première approximation, on peut voir au flux vers les fondements de l'arithmétique trois affluents principaux, que je présenterai ci-après en les regroupant par familles linguistiques. Le premier est placé sous l'influence de ce que l'on appellera l'école anglaise, appellation commode mais un peu superficielle ; si on note en effet entre ses différents travaux une certaine ressemblance, la filiation, en revanche, n'est rien moins qu'évidente et toute une étude reste à faire. Dans ce premier affluent, il convient de distinguer de nouveau diverses sources (Voir [5]) :

— Les écrits des géomètres britanniques de la fin du XVIII^e siècle, en particulier Playfair et Woodhouse, qui, par le biais du statut des nombres complexes, s'interrogent sur celui des entités arithmétiques et algébriques.

— « L' École analytique de Cambridge » [6], autour de George Peacock, et toute sa réflexion sur la nature de l'algèbre, son statut, ses fondements. On y voit l'algèbre se dégager de la conception classique d'une théorie mathématique qui vise à l'étude d'objets de nature déterminée, pour devenir celle des relations s'appliquant indifféremment à toutes sortes d'objets divers : les symboles utilisés pour les opérations n'ont pas d'autre sens que celui que leur confèrent les lois.

— Les travaux de Rowan Hamilton sur les nombres complexes, sur les quaternions (env. 1835-1845), et leur prolongement avec Cayley et les groupes (vers 1845).

— *The mathematical analysis of logic* de Boole (1847).

Le deuxième de ces affluents concerne la France et se centre sur les publications autour des *Annales de Mathématiques pures et appliquées* de Gergonne, avec un ensemble de réflexions sur les propriétés des opérations ordinaires. C'est par exemple là qu'en 1814 sont introduits les termes de « commutativité » et d' « associativité » ; c'est également ce périodique qui servira de théâtre aux célèbres discussions sur les nombres complexes et leur représentation géométrique, qu'auront les Servois, Argand, Gergonne, etc. Pourtant, bien que généralement cités par les auteurs ultérieurs, il ne semble pas que ces articles aient joué un rôle décisif dans l'affaire qui nous occupe.

Le troisième nous vient d'Allemagne. A côté des réflexions de Gauss dans les *Disquisitiones Arithmeticae* de 1801, on doit citer un ouvrage de Martin Ohm (1828-1829), dont le titre *Versuch eines volkommen consequenten Systems der Mathematik* est révélateur de l'intention. « Notre arithmétique, notre algèbre et ce qui est construit sur elles (...), écrit-il, sont plutôt un chaos d'affirmations, étrangères, sans liens les unes avec les autres, tout à fait sans fondement, le plus souvent incorrectes et jetées pêle-mêle ». [7]. L'objectif avoué et répété à l'envi de Martin Ohm (voir par exemple Novy, pp.84-85) est de donner à l'algèbre la certitude de la géométrie, de lui procurer des fondements semblables à ceux de la géométrie. C'est dans la même perspective que l'on doit placer les travaux de Justus Günther Grassmann, père des frères Hermann et Robert, dont nous parlerons plus loin; Hermann reconnaîtra d'ailleurs sa dette à l'égard du père.

Ces différents courants donneront naissance entre 1845 et 1870 à ce fleuve majestueux, qui roulera ces flots jusqu'au cœur même de la mutation mentionnée au début. Je me propose d'examiner dans cet article le dernier et le moins connu de ces affluents. Auparavant, quelques précisions préliminaires. Cette mutation soulève encore aujourd'hui de nombreuses questions, dont voici celles qui me paraissent les plus dignes d'attention :

- Quels sont les liens qui unissent sa composante géométrique à la composante analytico - arithmético - algébrique ? Comment expliquer la quasi-coïncidence temporelle de leur surgissement ?
- Comment s'exprime-elle en termes de théorie de la connaissance ? Quelle est son incidence sur la théorie de la connaissance elle-même ?
- Quels sont les éléments déterminants de cette mutation ? Si du côté de la géométrie les choses sont relativement claires, liées qu'elles sont à la théorie non euclidienne et à sa renaissance dans les années 1870, dans le domaine du nombre, la situation est plus embrouillée, et les causes responsables pour la géométrie n'ont que partiellement cours. De surcroît, les difficultés inhérentes aux situations pathologiques de l'analyse, en lesquelles on voit volontiers l'une de ces causes, sont encore à venir.

Voici un témoignage de première importance de la plume de Giuseppe Peano - un connaisseur - datant de 1891 :

> La nature des différentes espèces de nombres est plus ou moins amplement développée dans chaque traité d'arithmétique et d'algèbre ; et cette question fut l'objet de recherches spéciales d'innombrables mathématiciens et philosophes. La plupart de ces discussions se réduisent à de simples logomachies. Mais dans les dernières années, par l'action d'illustres scientifiques, (...) la question fut traitée avec des outils toujours plus perfectionnés et placée sur des bases plus solides; et si au jour d'aujourd'hui, elle suscite encore quelques contradictions entre les opinions de ces auteurs, et quelques incertitudes, on peut déjà pourtant entrevoir la solution complète. [8, p .87] [T1] *

Quelques exemples suffiront à témoigner de l'actualité de ces problèmes à l'époque, et de l'intérêt qu'ils suscitent. Hermann Grassmann [9], dont la place dans l'histoire des mathématiques n'est plus à établir, publie en 1861 un ouvrage destiné à l'enseignement de l'arithmétique [10] et qui reconsidère les fondements de cette discipline. Hermann Hankel, élève de Riemann et mathématicien considérable lui aussi, bien que décédé prématurément, consacre un gros traité [11] au problème de fondement posé par les diverses sortes de nombres, traité qui fera autorité ; comme il l'écrit lui-même au début de l'avant-propos, pour fonder d'une manière rigoureusement scientifique la théorie des fonctions d'une variable complexe, il s'agit « d'abord d'obtenir un point de départ pour le concept de nombre complexe » (p. V). Weierstrass, bien que surtout intéressé par les nombres réels, travaille aussi à la question du statut des nombres complexes et dans le sens même proposé par Hankel [12].

Dans le mouvement qui conduit vers 1865 à une remise en question fondamentale du statut des différentes sortes de nombres, on distingue au moins deux lignes causales, relativement indépendantes.

Première ligne causale

La première a trait aux difficultés conceptuelles occasionnées par le statut, en apparence contradictoire, des nombres négatifs et des nombres complexes, incitant progressivement les mathématiciens à s'interroger sur leurs fondements. Après tout, les négatifs et les complexes sont eux aussi des objets pathologiques ! L'interrogation relève - le mot est fréquemment utilisé à l'époque dans ce contexte - de la métaphysique, on dirait plus volontiers aujourd'hui de l'épistémologie des mathématiques. A quoi il convient d'ajouter la sorte de crise épistémologique ouverte par l'apparition des quaternions, vers 1840. Ces interrogations ressortissent davantage - insistons - à l'épistémologique qu'au technique. Nul à l'époque ne doute en effet de la légitimité des nombres négatifs ou complexes, ou de la valeur des résultats qu'ils procurent, quand bien même on n'est pas fixé sur leur signification. Soit dit en passant, on a ici un nouvel exemple de la faiblesse de la distinction « internaliste / externaliste », qui a déjà subi tant d'anathèmes : cette cause, gouvernée par un souci tenant autant de la théorie de la connaissance que d'un besoin de clarification mathématique, est-elle internaliste ou externaliste ? Il convient aussi de se demander pourquoi la nécessité de clarifier le statut des nombres négatifs et des nombres complexes est apparue si tardivement. Pourquoi à ce moment précis ? [13]

Voici quelques repères propres à fixer ces interrogations; ils ont été choisis parmi une infinité d'autres possibles. Pour donner une idée de la confusion qui régnait encore dans les années 1820 autour des nombres complexes, il suffit de relire Cauchy [14], pourtant un orfèvre dans l'utilisation des « quantités imaginaires » :

> En analyse, on appelle expression symbolique ou symbole toute combinaison de signes algébriques qui ne signifie rien par elle-même, ou à laquelle on attribue une valeur différente de celle qu'elle doit naturellement avoir. On nomme de même équations symboliques toutes celles qui, prises à la lettre et

* Les originaux de certains textes cités se trouvent à la fin de l'article avec la lettre T, suivie du numéro d'ordre.

interprétées d'après les conventions généralement établies, sont inexactes ou n'ont pas de sens, mais desquelles on peut déduire des résultats exacts, en modifiant et altérant selon des règles fixes ou ces équations elles-mêmes, ou les symboles qu'elles renferment. (...). Parmi les expressions ou équations symboliques dont la considération est de quelque importance en analyse, on doit surtout distinguer celles que l'on a nommées imaginaires. Et plus loin : (p. 175) « L'équation

$$\cos(a+b)+\sqrt{-1}\,\sin(a+b)=(\cos a+\sqrt{-1}\,\sin a)(\cos b+\sqrt{-1}\,\sin b)$$

elle-même, prise à la lettre, se trouve inexacte et n'a pas de sens ».

On ne peut que rejoindre Hankel, quand il parle à ce propos de « galimatias » [15]. Comme l'écrit Marie José Durand :

> Mais il est en même temps plus difficile d'admettre l'utilisation de quantités qui ne semblent avoir rien de commun avec la réalité. De fait, l'attitude des mathématiciens face à ce problème va dépendre de l'importance qu'ils donnent à la notion d'utilité : si elle prédomine, alors, il leur sera plus facile d'admettre de se référer à un symbole quelconque, dans la mesure où il permet d'étendre le champ et l'importance des résultats. Mais si la référence au réel est primordiale, les quantités impossibles seront plus difficiles à admettre. [5, p. 74]

On voit bien apparaître dans ces lignes comment le problème est conceptuel et relève de la théorie de la connaissance. Le texte suivant est du grand mathématicien Rowan Hamilton (le début de la citation est donné en annexe 1). Il éclaire particulièrement bien notre propos :

> The thing aimed at, is to improve the *Science*, not the Art nor the Language of Algebra. The imperfections sought to be removed, are confusions of thought, and obscurities or errors of reasoning; not difficulties of application of an instrument, nor failures of symmetry in expression. And that confusions of thought, and errors of reasoning, still darken the beginnings of Algebra, is the earnest and just complaint of sober and thoughtful men, who in a spirit of love and honour have studied Algebraic Science, admiring, extending, and applying what has been already brought to light, and feeling all the beauty and consistence of many a remote deduction, from principles which yet remain obscure, and doubtful.
>
> For it has not fared with the principles of Algebra as with the principles of Geometry. No candid and intelligent person can doubt the truth of the chief properties of *Parallel Lines*, as set forth by Euclid in his Elements, two thousand years ago; though he may well desire to see them treated in a clearer and better method. The doctrine involves no obscurity nor confusion of thought, and leaves in the mind no reasonable ground for doubt, although ingenuity may usefully be exercised improving the plan of the argument. But it requires no peculiar scepticism to doubt, or even to disbelieve, the doctrine of Negatives and Imaginaries, when set forth (as it has commonly been) with principles like these (...). It must be hard to found a SCIENCE on such grounds as these, though the forms of logic may build up from them a symmetrical system of expressions, and a practical art may be learned of rightly applying useful rules which seem to depend upon them.
>
> So useful are those rules, so symmetrical those expressions, and yet so unsatisfactory those principles from which they are supposed to be derived, that a growing tendency may be perceived to the rejection of that view which regarded Algebra as a SCIENCE, *in some sense analogous to Geometry*, and to the adoption of one or other of those two different views, which regard Algebra as an Art, or *as a Language* : as a System of Rules, or else as a System of Expressions, but not as a System of *Truths*, or Results having any other validity than what they may derive from their practical usefulness, or their logical or philological coherence.
>
> Yet a natural regret might be felt, if such were the destiny of Algebra; if a study, which is continually engaging mathematicians more and more, and has almost superseded the Study of Geometrical Science, were found at last to be not, in any strict and proper sense, the Study of a Science at all : and

> if, in thus exchanging the ancient for the modern Mathesis, there were a grain only of Skill or Elegance, at the expense of Contemplation and Intuition, Indulgence, therefore, may be hoped for, by any one who would inquire, whether existing Algebra, in the state to which it has been already unfolded by the masters of its rules and of its language, offers indeed no rudiment which may encourage a hope of developing a SCIENCE of Algebra : a Science properly so called; strict, pure, and independent; deduced by valid reasonings from its own intuitive principles; and thus not less an object of a priori contemplation than Geometry, nor less distinct, in its own essence, from the Rules which it may teach or use, and from the Signs by which it may express its meaning. [16, p. 294-295].

La subdivision de l'algèbre en pratique, philologique et théorétique (voir début de l'annexe 1), que la tradition n'a pas retenue, est révélatrice d'un état d'esprit et d'un moment de l'histoire de cette discipline. Elle exprime des hiatus dans la cohésion de l'édifice. Le fait d'évacuer certaines difficultés sur un autre champ est une mesure provisoire, qui cautionne momentanément l'usage d'outils délicats, réprouvés par les bonnes mœurs mathématiques.

Un autre témoignage de Robert Woodhouse, plus ancien, confirme cette problématique autour des nombres complexes en l'affinant :

> Amongst the various objections urged against mathematical science, few oppose its evidence and logical accuracy; and, since its demonstrations have been acknowledged to proceed by a series of the strictest inferences, from the most evident principles, the study of abstract science has generally been deemed peculiarly proper to habituate the mind to just reasoning. But of late, the dissentions of mathematicians have subjected to doubt (...) certain parts of the pure mathematics have become the subject of dispute. Much has been heard of the science of quantity being vitiated with jargon, absurdity, and mystery, and perplexed with paradox and contradiction (...).
>
> The introduction of impossible quantities, is assigned as a great and primary cause of the evils under which mathematical science labours. During the operations of these quantities, it is said, all just reasoning is suspended, and the mind is bewildered by exhibitions that resemble the juggling tricks of mechanical dexterity.
>
> The arguments that seem to render all operations performed with impossible quantities unintelligible, may be included under the following statment. Algebra is a species of short-hand writing; a language, or system of characters or signs, invented for the purpose of facilitating the comparison and combination of ideas. Now all demonstration by signs, must ultimately rest on observations made on individual objects ; and all the varieties of the transformation and combination of signs, except what are arbitrary and conventional, must be regulated by properties observed to belong to the things of which the signs are the representatives. Demonstration by signs is shewn to be true, by referring to the individual things the signs represent ; and is shewn to be general, by remarking that the operation is the same, whatever is the thing signified, or, in other words, that the operation is independent of the things signified. (...).
>
> Now, if operations with any characters or signs lead to just conclusions, such operations must be true by virtue of some principle or other; and the objections against imaginary quantities, ought to be diverted upon the unsatisfactory explanation given of their nature and uses (...). [17, pp. 89-91.]
>
> To excuse the prolixity that may appear in the explanation of the operations, and in the proofs of their justness, I wish it to be considered, that it was necessary to examine the notions on which calculation ultimately rests ; to explain the meaning of imaginary symbols, by tracing their derivation ; to establish by separate and independent proofs, rules for the combination of impossible quantities, and not by inference from their similarity to rules for like combinations of real quantities ; and carefully to distinguish between what is proved on evident principles, and what is only consequent from arbitrary assumptions. [17, p. 118]

John Playfair, dès 1778 rapporte sur les mêmes difficultés et tente une explication :

> The paradoxes which have been introduced into algebra, and remain unknown in geometry, point out a very remarkable difference in the nature of those sciences. The propositions of geometry have never given rise to controversy, nor needed the support of metaphysical discussion. In algebra, on the other hand, the doctrine of negative quantities and its consequences have often perplexed the analyst, and involved him in the most intricate disputations. The cause of this diversity, in sciences which have the same object, must no doubt be sought for in the different modes which they employ to express our ideas. In geometry every magnitude is represented by one of the same kind ; lines are represented by a line, and angles by an angle. The genus is always signified by the individual, and a general idea by one of the particulars which fall under it. By this means all contradiction is avoided, and the geometer is never permitted to reason about the relations of things which do not exist, or cannot be exhibited. In algebra again every magnitude being denoted by an artificial symbol, to which it has no ressemblance, is liable, on some occasions, to be neglected, while the symbol may become the sole object of attention. It is not perhaps observed where the connection between them ceases to exit, and the analyst continues to reason about the characters after nothing is left which they can possibility express (...)
>
> The truth of these observations will be rendered evident by considering the nature of imaginary expressions, and the different uses to which they have been applied. [18, pp. 318-319].

On voit que la gêne éprouvée par les géomètres est surtout épistémologique, et la mutation qui règlera le problème sera elle aussi de l'ordre de la théorie de la connaissance.

Seconde ligne causale

Dans l'étude des causes du mouvement à l'origine de cette mutation épistémologique (dont les retombées mathématiques furent par ailleurs considérables), il s'en trouve une plus externe que la précédente, plus générale, négligée jusqu'ici : elle concerne l'état de la pensée scientifique dans son ensemble. Les développements de la science dans la première moitié du XIX^{e} siècle contribueront à en clarifier le concept même, à mieux définir son statut et ses exigences. Les triomphes de la mécanique céleste, ceux de l'optique et de l'électricité, de la chimie, pour prendre des exemples emblématiques, confèrent à la discipline encore éthérée qu'on appelle « philosophie naturelle » un statut nouveau, canonisé par un mouvement épistémologique, le positivisme, et une idéologie, le scientisme. On pourrait, pour faire image, caractériser ce moment comme celui où la philosophie naturelle devient science. Ces succès et la manière dont ils sont obtenus accréditent une méthode, la méthode, qui seule mène à la vérité. C'est le temps où l'épithète « scientifique » (il conviendrait à ce propos de mener une étude sur la fréquence d'utilisation de cette épithète) prend toute son ampleur et cautionne de sa vigueur récente le substantif qu'elle qualifie. Au cours des processus de pensée qui conduisent à cette accréditation, de nouvelles valeurs apparaissent ou prennent une coloration différente, la rigueur, la pensée rigoureusement scientifique écrira Robert Grassmann [voir aussi 19], frère d'Hermann, la vérité elle-même n'échappera pas au raz-de-marée. A côté de l'hypothèse la plus courante je formule donc celle-ci. La réflexion autour des fondements des diverses sortes de nombres, la nécessité même de tels fondements, n'est pas le seul fait de difficultés techniques placées en travers de la pensée mathématique, de monstres qu'elle aurait à exorciser ; elle répond aussi à une nouvelle manière d'envisager la scientificité. Celle-ci requiert la présence d'un ensemble ordonné, avec des relations hiérarchisées entre les éléments constituants. C'est un peu le sens préconisé par Auguste Comte, quand, dans la première leçon de son cours de *Philosophie positive*, il écrivait [20] que la philosophie s'occupait du système général des conceptions humaines, la philosophie positive visant à la coordination des faits obervés. Comme l'écrit Engel parlant de Grassmann : « La direction critique des mathématiques, qui exigeait un examen et une correction des démonstrations défectueuses, démonstrations dont on s'était satisfait pendant longtemps, n'était encore que dans ses premiers commencements. Nul ne songeait à une critique de la méthode mathématique ». [21] La tendance nouvelle qui se fait jour dans les sciences est confirmée par Hankel, quand il écrit ([11] p. X) : « Dans les sciences de la nature est apparue, dans ces derniers temps, la tendance décisive de s'élever du monde des détails empiriques vers celui des grands principes ». Ou encore (p.VIII) lorsque pour les nombres il demande « rigueur et systématique ». Je reviendrai sur cette citation pour la compléter.

Cette seconde ligne causale ressortit elle aussi à la théorie de la connaissance. Quand, avec la lucidité et l'alacrité qui le caractérisent, Louis Rougier se penchera sur les grands chambardements des mathématiques dans la deuxième moitié du XIX^{e} siècle, il y verra une authentique révolution pour la théorie de la connaissance. C'est là en partie une application sectorielle, à l'intérieur d'une province du savoir, de la notion de *Zeitgeist,* ou, si l'on préfère, de « mental collectif », comme disait Dupront. Le chercheur vit dans un milieu intellectuel dont il est tributaire. Selon la belle métaphore de Gusdorf [22, p.89], il est comme le cristal qui se brise ou émet une certaine tonalité, lorsqu'on produit un son à proximité.

Reprenons et résumons en modifiant légèrement l'approche. A propos de Z, de C et des problèmes qu'ils ont posés aux mathématiciens, il convient de distinguer deux niveaux épistémologiques :

a) un niveau élémentaire, proche des préoccupations ordinaires du géomètre : ces entités sont fondées, sinon dans la contradiction, du moins sur des considérations mal définies, dégageant un sentiment de malaise. Pour reprendre la distinction proposée par Hamilton, les difficultés sont ici d'ordre philologique et théorétique ;

b) un niveau où le questionnement relève de préoccupations proprement philosophiques.

On peut voir une double origine à cette seconde ligne causale, plutôt théorétique selon cette même terminologie. D'abord fruit de la pensée mathématique en elle-même, dans son intimité, qui se soucie de coordonner l'ensemble de l'édifice, d'en présenter une synthèse avec unité et ordre. Dans l'idée, aussi, de réaliser pour l'arithmétique et l'algèbre ce qui a été fait pour la géométrie, de reproduire partout le modèle euclidien. Et puis l'influence de la pensée scientifique dans son ensemble, d'une pensée qui s'installe comme la seule capable de conduire au vrai.

§ 2 H. HANKEL, THEORIE DER COMPLEXEN ZAHLENSYSTEME (1867) [11]

§ 2.1 L'épistémologie mathématique de Hankel

J'aborderai cette étude par une brève mais importante citation empruntée à une lettre de Hankel à Grassmann, de novembre 1866 :

> Un besoin philosophique, si vous voulez le nommer ainsi, que je poursuis dans toutes les branches des mathématiques, de comprendre à fond les fondements et leurs connexions, m'engagea cet été à étudier le bel ouvrage de Hamilton « Lectures on Quaternions », dans l'idée de clarifier la nature des nombres imaginaires. [12, p. 270] [T2].

Cette citation confirme l'aspect philosophique des recherches sur les fondements. On en trouve dans l'ouvrage de 1867 de nombreuses confirmations explicites ; ainsi [11, p. 15], Hankel utilise pour ses réflexions l'expression « Metaphysik des mathematischen Grundbegriffe ». De même p.VII, où il affirme que les grandeurs rationnelles et irrationnelles sont présentées pour la première fois d'une façon rigoureuse dans son ouvrage : « Qu'il était nécessaire d'entrer parfois dans des considérations qui appartiennent à la métaphysique du calcul ». La citation donne aussi une indication sur le rôle des quaternions. La découverte de Hamilton ne serait donc pas à l'origine de ses préoccupations fondamentalistes; au contraire, celles-ci, déjà présentes, auraient attiré l'attention sur les créatures du savant Irlandais. Dans le même sens, Hermann Grassmann dira n'avoir pas eu en main les ouvrages sur la théorie des quaternions et ne les connaître qu'à partir d'extraits.

Comme je l'ai observé au paragraphe précédent, le fauteur de trouble se situe du côté du statut des nombres complexes, accessoirement de celui des négatifs. Hankel l'écrit lui-même dans son avant-propos : « Il s'agissait d'abord d'obtenir un point de départ dans le concept de nombre complexe. Une revue de la littérature me convainquit rapidement que, d'une part de nombreux mathématiciens méconnaissent complètement la question dans sa signification et dans son importance et croient pouvoir en finir avec elle par un raisonnement des plus superficiels, (...). » (p. V) La question centrale est celle de l'existence d'entités dont la définition recèle une forme de contradiction. Le problème est présenté en ces termes par Hankel :

> Veut-on répondre à la question souvent posée, de savoir si un certain nombre est possible ou impossible, alors il convient de s'entendre d'abord sur le sens propre de cette question. Le nombre n'est plus guère aujourd'hui une chose, une substance qui existe, autonome, un principe autonome, comme les formes pythagoriciennes, à l'extérieur du sujet pensant et des objets qu'il détermine. La question de l'existence ne peut dès lors que se rapporter au sujet pensant ou aux objets pensés, dont les relations représentent les nombres. A strictement parler, l'impossible pour le mathématicien ne réside que dans ce qui est logiquement impossible, c'est-à-dire qui se contredit soi-même. Que des nombres impossibles en ce sens ne sont pas autorisés ne demande pas de démonstration. Mais les nombres concernés sont-ils logiquement possibles, leur concept clair et sûrement défini et donc sans contradiction, alors cette question ne peut que revenir à savoir si dans le domaine du réel ou dans celui de l'effectif dans l'intuition, (...), s'il y a des objets auxquels les nombres, soit les relations intellectuelles de la certaine manière d'apparaître, adhèrent. Dans ce sens, on s'entendait à nommer impossibles les nombres produits à partir de $\sqrt{}$-1, aussi longtemps que l'on ne connaissait d'eux aucune clarification intuitive, et il existe encore aujourd'hui des nombres de cette sorte. Mais, après que l'on eût trouvé une représentation géométrique des nombres $a + b \sqrt{-1}$, et interprété géométriquement leurs opérations, on ne peut en aucune manière les qualifier d'impossibles; ils sont tout à fait de la même réalité que les nombres positifs ou négatifs, quand bien même on trouve dans l'intuition pour ces derniers de nombreux substrats, et dans beaucoup de cas on peut les représenter ou les rendre possibles dans la réalité, où la relation exprimée par le nombre $a + b \sqrt{-1}$ ne peut pas être réalisée. [11, p .6] [T3] (voir aussi annexe 5).

Voici donc clairement exprimé ce critère d'existence, qui deviendra classique : n'est impossible pour le mathématicien que ce qui se contredit. Une fois satisfaite la condition de ne pas se contredire, ajoute Hankel, la question ne peut que porter sur l'existence, dans le domaine du réel ou dans celui de l'intuition, d'un « substrat actuel » pour les objets. Dans ce sens, la représentation géométrique des nombres complexes fait l'affaire. Ailleurs (p. 10), il met en évidence le côté arbitraire des entités, ce qui constitue le postulat central de son épistémologie des mathématiques : les règles des opérations formelles et pures portant sur des objets mentaux relèvent de notre arbitraire, pourvu, précisément, que soit respectée la condition d'absence de contradiction logique. C'est à cette occasion qu' Hankel propose un test tout pragmatique de consistance, peut-être le premier qui ait vu le jour : « Pour pouvoir être convaincu de ce que, par aucune composition des associations, une telle contradiction ne puisse se présenter, nous devrons tenir les règles elles-mêmes indépendantes les unes des autres, de manière qu'aucune d'elles n'empiète sur les autres : nous devons nous limiter à l'absolument suffisant ». [11, p. 10] [T4]. Les interrogations du genre de celles qu'on découvre dans la citation précédente semblent devenir courantes à l'époque. Je rapporterai à ce propos l'exemple de Paul du Bois-Reymond : dans sa *Théorie générale des fonctions* de 1882, que Gaston Milhaud traduit en 1887, on lit en effet que la grande question du début de l'ouvrage concerne « cette façon de conclure à l'existence effective d'objets que ne peut atteindre aucune perception immédiate ou médiate (...) » (p. 21).

Dans l'esprit de ce « postulat central », Hankel affirme l'idée suivante, qui est en même temps la bannière sous laquelle se range tout le mouvement de réforme des années 1870, culminant avec les *Grundlagen* de Hilbert (1899) : « Comme je l'ai montré plus tôt, le concept de nombre peut être conçu d'une manière purement formelle et sans référence à la grandeur; cette dernière n'intervient que comme substrat intuitif de ces formes ». [11, p.VIII] [T5] Dans le même sens : « Les sciences purement formelles, logique et mathématique, ont à traiter des relations qui sont indépendantes, ou au moins peuvent l'être, du contenu déterminé, de la substance des objets ». [11, p. 1] [T6] Notre auteur convient alors de désigner par « transcendants », « purement mentaux », « purement intellectuels » ou « purement formels », les nombres dont le concept est parfaitement déterminé, mais que l'on n'est pas en mesure de construire dans l'intuition. Dans tout ce contexte, le mot « formel » revient de manière récurrente.

Si, comme il l'écrit (voir supra), de nombreux mathématiciens méconnaissent la signification et l'importance des questions de fondements, des changements se font sentir, qui semblent concerner la science tout entière :

> Dans les sciences de la nature est apparue, au cours de ces derniers temps, la tendance décisive de s'élever du monde des détails empiriques vers celui des grands principes, lesquels gouvernent tout le singulier et le réunit en un tout sous un point de vue supérieur : la tendance vers une philosophie de la nature non octroyée du dehors, mais découlant de la chose même. Il semble qu'un besoin parent s'impose aussi de nos jours, toujours plus généralement, dans le domaine des mathématiques, besoin qui a toujours été de mise en Angleterre. Le souhait de réveiller ce besoin et de le satisfaire, au moins dans un certain cercle, a exercé une influence décisive dans ma volonté de rédiger ce livre. [11, p.IX] [T7]

Bien dans la ligne de la scientificité nouvelle, Hankel exige pour les mathématiques rigueur et systématicité : « Dans les III^{e} et IV^{e} sections, la nature des nombres et grandeurs entiers, fractionnaires, rationnels et irrationnels est présentée rigoureusement et systématiquement — il me semble pour le première fois — selon un point de vue élevé et général ». [11, p. VII] [T8] Une théorie pure poursuit alors « partout l'exercice de dériver déductivement de relations données des relations nouvelles, qui sont sans doute contenues dans celles supposées et posées en même temps avec elles, mais dont la connaissance, du fait de la nature de l'esprit humain, constitue un progrès scientifique ». [11, p. 1] [T9]

Pour les mots clés, certains récurrents, dans l'épistémologie mathématique de Hankel on retiendra « formel », « pur », « système », « extension ».

§ 2.2 Plan de l'ouvrage

La recherche de fondements convenables pour les nombres complexes nécessite, nous dit Hankel, une connaissance approfondie des opérations arithmétiques et des nombres, et c'est à cela qu'est consacrée une bonne partie de l'ouvrage. Voici un aperçu de la *Theorie der complexen Zahlensysteme*, en ce qui regarde la partie qui nous intéresse ici.

La première section traite des entiers positifs, dans la perspective des opérations d'addition, de multiplication et d'exponentiation (opérations qualifiées de *thétiques*), ainsi que de leurs propriétés; il s'agit du concept naïf et ordinaire de nombre. Au § 2 de cette section, Hankel envisage les opérations inverses, qualifiées de *lytiques*, opérations conduisant aux extensions du concept de nombre. Puis est étudié, dans ses aspects technique, philosophique et historique le fameux « principe de permanence des lois formelles » (§ 3), le ressort pragmatique et conventionnel de toute la construction. La deuxième section « Allgemeine Formenlehre » réalise pleinement le projet fondé sur ce que j'ai appelé plus haut le « postulat central » : construire une théorie pure des opérations, c'est-à-dire qui soit indépendante de la nature des objets qu'elles manipulent, avant de redescendre dans la matière, pour traduire les résultats obtenus dans l'écriture ordinaire de l'addition et de la multiplication. Les troisième et quatrième sections appliquent les considérations précédentes aux divers ensembles de nombres entiers, rationnels et irrationnels, en les considérant, respectivement, au point de vue formel et à celui de la théorie des grandeurs. La cinquième traite, toujours dans cette perspective nouvelle, et c'était d'ailleurs là l'un des buts même de l'ouvrage, des « nombres imaginaires communs ». Enfin, dans une dernière section, qui ne nous intéresse pas ici, Hankel examine ce qu'il appelle les « nombres complexes supérieurs ».

§ 2.3 Principe de permanence

Le « principe de permanence des lois formelles » occupe les pages 10 à 17 du paragraphe 3 de la section « Exposition ». On part « d'objets a, b, c, ... quelconques qui sont présents dans l'intuition ou mentaux », sur lesquels ont définit un système d'opérations mentales, sans égard à une quelconque référence à des « rapports actuels ». Ce système, « sans aucune interprétation de ses résultats et sans applications demeure vide ». Pour ne pas sombrer dans l'abstrus, les règles de ces opérations sur des objets mentaux seront choisies de manière à contenir celles de l'arithmétique ordinaire. Comme l'écrit Hankel lui-même : « Celles-ci, nous les prendrons comme fil conducteur et nous déterminerons des opérations formellement de manière que les résultats reviennent à ceux de l'arithmétique ordinaire, lorsque à la place d'opérer avec des objets mentaux, on opère avec des objets existant dans l'intuition et dont les relations mutuelles sont exprimées par des nombres communs ». [11, p. 11] [T10]

Voici l'énoncé général du principe de permanence : « Le hodgetische* principe contenu là dedans peut être désigné comme le principe de permanence des lois formelles et consiste en ceci : lorsque deux formes exprimées dans les signes généraux de l'arithmetica universalis sont égales, alors elles doivent demeurer égales quand les signes cessent de désigner des grandeurs simples et que, par là même, les opérations reçoivent aussi n'importe quel autre contenu ». (p. 11) [T11] Hankel insiste (p. 12) sur le fait que la mathématique purement formelle, élaborée à partir du principe de permanence, n'est pas une généralisation de l'arithmétique ordinaire ; elle est une science nouvelle que l'arithmétique exemplifie.

Il convient de noter que le livre, et aussi bien le principe de permanence, suscitent quelques oppositions, malgré un indiscutable succès. Ainsi, Frege écrit-il : « Ce qui a fait beaucoup pour embrouiller les choses de ce point de vue est le livre tant vanté, mais totalement confus sous le rapport logique, de Hankel. Les Anglais, d'après tout ce que j'entends, semblent beaucoup plus clairs, surtout Peacock ». [23, pp. 35-36] Mais ce jugement à l'emporte-pièce a peut-être son origine dans les divergences épistémologiques essentielles qui séparent Hankel de Frege, conjecture confirmée par le fait que Frege n'a pas lu Peacock, comme il le dit lui-même, et qu'en la matière, l'auteur anglais n'est en rien plus clair que Hankel. Nous y reviendrons avec quelque détail.

§ 2.4 Allgemeine Formenlehre

Le concept de forme [24] est omniprésent dans les textes que nous envisageons. Emprunté au langage philosophique, il sert à distinguer ce qui porte sur des objets actuels - pour reprendre la manière de s'exprimer de l'époque - et la forme sans matière qui y intervient. Pour une raison qu'il nous indique lui-même, et il est peut-être le premier à s'engager dans cette voie, Hankel note les opérations au moyen de signes nouveaux, dans une écriture fonctionnelle. Après bien des hésitations, il se résigne à cette complication de

* *Hodgese* ou *Hodgetik* : instruction pour l'étude d'un domaine de la science.

façon à se débarrasser, dit-il, des habitudes nées d'un long commerce avec les signes ordinaires.

Au § 4 intitulé « Algorithmus associativer Rechnungsoperationen ohne Commutation », Hankel introduit sur des « objets a, b, c, d, ... » une association [« Verknüpfung »] qui, aux objets a,b associe l'objet c noté λ (a, b). Elle est telle que l'on peut en associant « thétiquement » c et b retomber sur a : θ (c,b) = a, soit : θ {λ (a,b), b} = a. θ et λ sont respectivement qualifiées d'opérations « thétique » et « lytique » ; elle sont supposées univoques et partout définies, encore que l'idée d'un ensemble des objets sur lesquels elles opèrent ne semble pas être présente. Hankel établit pour ces opérations une quinzaine d'égalités, dont voici deux, pour l'exemple :

θ [a,θ (b,c)] = θ [θ (a,b),c] , qui est la formule (3) et

λ [θ (a,c),b)] = λ [a, λ (b,c) = θ [a, λ (c,b)], formule (4,6).

On saisit immédiatement l'intérêt de cette nouvelle écriture, dont la signification devient évidente dès lors que l'on traduit dans l'écriture ordinaire : θ —> + ou x , λ —>-.

Hankel introduit ensuite l'idée d'élément neutre, « module », comme il disait :

θ (a,n) = a (quel que soit a [« mit jedem a »]), l'associativité conduisant alors à θ (n,c) = c.

De là on déduit encore λ (a,n) = a et λ (b,b) = n .

Au § 5, il considère le cas où l'opération est de plus commutative, et ultérieurement celui où la lyse n'est pas partout définie (p. 25). Cette lyse devient possible moyennant la considération, à côté de la série des objets primitifs, d'une série d'objets inverses « qui sont ou transcendantaux ou constructibles dans l'intuition ». C'est ici que naturellement entre en jeu le principe de permanence (p. 28). On pose λ (n,b) = b_n, b_n est l'inverse de b, et on a

λ (a,b) = θ (a,b_n).

Pour faire voir la généralité de ces considérations, Hankel propose un exemple, que l'on retrouvera dans les ouvrages de « maths modernes » des années 1970 : (a,b) = (a+b) : 2 ; il vérifie (p. 21) que cette opération, qui est commutative, n'est pas associative.

Signalons aussi que le résultat le plus important, du point de vue strictement mathématique, de cette *Theorie der Complexen Zahlensysteme* se trouve aux pages 107-108 [25].

§ 2.5 Les nombres imaginaires communs (5e section)

Dans le §19 Hankel présente sa « Formale Theorie der imaginären Zahlen ». L'idée générale est semblable à celle utilisée pour les nombres négatifs, introduits de manière à donner solution à certaines équations. Il considère donc l'équation xx = -1 et admet que x = i est une solution, soit ii = -1, « i est quoiqu'il en soit différent de tous les nombres réels ; il n'est de plus rien d'autre qu'un signe pour un objet mental imaginé (...) dont l'être propre reste, et doit rester, complètement indéterminé dans toute la pure théorie, car nous n'y avons qu'à nous occuper des associations [« Verknüpfungen »] dont nous déterminerons les lois à partir du principe de permanence ». (p. 67) On postule que le produit de réels et de l'unité imaginaire est associatif, commutatif et distributif et que l'on a : A+Bi = Bi+A. Soit dit en passant, Hankel n'observe pas que dans l'écriture de la distributivité, les deux signes + n'ont pas la même signification. On démontre alors la commutativité et l'associativité de l'addition des nombres complexes. Ayant défini le produit normalement en posant ii = -1, Hankel établit successivement l'associativité et la commutativité de la multiplication, puis la distributivité.

A la page 70, il nous rend attentif à une question qui n'avait pas encore été envisagée jusqu'ici, savoir celle de l'unicité de l'unité imaginaire. Après avoir introduit des unités de ce genre par la notation χ, λ, observant que « de tels signes reçoivent leur signification formelle des règles à partir desquelles on opère avec eux » (bel exemple de définition implicite avant l'heure !), Hankel s'emploie à montrer qu'elles sont toutes égales. On est amené pour ce faire à écrire $(\chi + i)(\chi - i) = 0$. Or, note-t-il, cela ne suffit pas encore à établir l'égalité $\chi = \pm i$. Cette conclusion utiliserait la propriété d'intégrité, laquelle n'est garantie par rien; c'est donc au principe de permanence qu'il faut en appeler. De là une judicieuse remarque: « Laisse-t-on tomber l'un de ces postulats, lesquels apparaissent comme des suppositions arbitraires et justement en tant que telles distinguent le système de nombres complexes habituels, alors l'équation $xx = -1$ a d'autres solutions que la solution $\pm i$, comme c'est effectivement la cas dans la théorie des quaternions ». [11, p. 70] [T12].

§ 3. HERMANN GRASSMANN

§ 3.1 Epistémologie mathématique de H. Grassmann

Pour Hermann Grassmann, le concept central est celui de « forme ». En effet ([26] p. VIII ; p. 23) « la mathématique pure est la science de l'être particulier en tant que devenu pensée. L'être particulier, pris dans ce sens, nous l'appelons une forme de pensée ou tout simplement une forme. Ainsi, la mathématique pure est *théorie des formes* ». Notons que la grandeur est une forme particulière.

Le point de départ de l'épistémologie de Grassmann réside dans ce qu'il nomme la division la plus élevée de toutes les sciences, savoir celle entre les sciences réelles et les sciences formelles (p. VIII ; p. 22) : « Les premières figurent l'être dans la pensée, un être lui-même indépendant de cette pensée, et leur vérité est donnée par la concordance de la pensée avec cet être; les secondes, cependant, ont pour objet ce qui est posé par la pensée elle-même, et leur vérité est donnée par la concordance entre eux des processus de pensée ». Il importe donc de dire ce qu'est le vrai, de revenir ainsi aux premiers fondements de la science. Mais le vrai se définit de deux manières bien différentes, de là cette subdivision dans le savoir. Une conséquence remarquable de ce point de vue réside dans l'observation suivante, qui pointe irrésistiblement vers l'axiomatique moderne : « Pour cette raison, les sciences formelles ne doivent pas partir de principes comme le font les sciences réelles; mais ce sont les définitions qui forment leur fondement ». [27] L'auteur ajoute en note (p. VIII) : « Si on a néanmoins introduit des axiomes dans les sciences formelles, comme par exemple en arithmétique, alors ceci doit être considéré comme un abus qui ne peut s'expliquer que par le traitement correspondant en géométrie ». Ainsi, arithmétique et géométrie appartiennent-elles à deux mondes différents. C'est clairement explicité plus loin (p. IX ; p. 23) : « Avant de passer à la division de la théorie des formes, il faut en exclure une branche qu'on y a inclus à tort, à savoir la géométrie. Déjà, d'après les conceptions [28] établies plus haut, il est évident que la géométrie, de même que la mécanique, renvoie à un être réel; pour la géométrie c'est en effet l'espace; et il est clair que le concept d'espace ne peut aucunement être engendré par la pensée, mais c'est toujours un être donné qui lui fait face ». On trouve encore cette même vision dans une annexe à l'édition de 1877 de l'*Ausdehnungslehre* , où il écrit : « La théorie de l'espace, car elle est quelque chose de donné dans la Nature, soit l'espace, n'est pas une branche des mathématiques pures, mais une application [de cette mathématique] à la Nature ». [29, p. 297] [T13] Les sciences formelles à leur tour se subdivisent en deux : « Les sciences formelles examinent, soit les lois générales de la pensée, soit le particulier posé par la pensée ; la première est la dialectique (logique), la seconde la mathématique pure ». Subdivision que reprendra d'ailleurs Hankel ([9], p. 1).

Le problème de la vérité est clairement présent à l'esprit de Grassmann, qui l'exprime en ces termes :

> La pensée n'existe que par rapport à un être qui lui fait face et qui est représenté par elle ; mais, pour les sciences réelles cet être est indépendant, existe par lui-même en dehors de la pensée ; tandis que pour les sciences formelles, il est posé par la pensée qui maintenant fait elle-même face, à son tour, en tant qu'être, à un second acte de pensée. Si maintenant la vérité, en tant que telle, repose sur la concordance de la pensée avec l'être, elle le fait en particulier, pour les sciences formelles, sur une concordance du second acte de pensée avec l'être posé par le premier acte, c'est-à-dire, sur la concordance des deux actes de pensée. Ainsi, dans les sciences formelles, la démonstration ne dépasse pas la pensée elle-même dans une autre sphère, mais reste purement dans la combinaison des divers actes de pensée. [26, p. VIII ; p. 22].

Les lignes qui précèdent - comme d'ailleurs la citation que je donne plus loin (p. 12 ; p. 47) - sont proprement philosophiques et illustrent les réserves que faisait Möbius à ce propos : « A cela je réplique que j'ai été en effet intimement réjoui de connaître en vous un parent par l'esprit, mais que cette parenté spirituelle n'a trait qu'aux mathématiques et non à la philosophie ; car, comme je me souviens de vous l'avoir expliqué par oral récemment, j'ai été depuis toujours un étranger dans le champ de la spéculation philosophique ». [30, p. 100] [T14] La gêne éprouvée par Möbius n'était pas l'exception, tant s'en faut ; ainsi, dans son commentaire Engel écrit : « Il est suffisamment connu que la tournure semi-philosophique de l'Ausdehnungslehre de 1844 fut la cause de ce que cette œuvre remarquable n'ait pas pu accéder à une légitime reconnaissance. L'intention exprimée de Grassmann était de présenter ses concepts autant que possible sous la forme la plus générale dont ils étaient capables ». [12, Erster Theil, p. 404] [T15] Dans le cadre de la scientificité nécessaire pour les mathématiques, à laquelle j'ai fait allusion dans l'introduction, une place particulière revient à la rigueur : « Tout le monde admettra le caractère indispensable de la première exigence, à savoir la rigueur scientifique. Quant à la deuxième, c'est toujours un point qui n'est pas encore suffisamment observé par la plupart des mathématiciens. (...). Une telle démonstration ne laisse peut-être rien à désirer du côté de la rigueur, mais elle n'est pas scientifique; il lui manque la deuxième exigence, la vue d'ensemble ». (p. XIV ; p. 30).

On retrouve chez Grassmann, ce que j'ai appelé pour Hankel « le postulat central », tel qu'exprimé par exemple dans le paragraphe 13 (p. 12 ; p. 47) : « Tout d'abord nous posons ici à la place du point, c'est-à-dire du lieu particulier, *l'élément*, par lequel nous comprenons le particulier en tant que tel pris comme distinct des autres particuliers ; en effet, dans la science abstraite nous n'attachons aucun autre contenu à l'élément, c'est pourquoi, il ne peut être question ici de quel particulier il s'agit à proprement parler — car il s'agit justement du particulier en soi sans aucun contenu réel — ni vis-à-vis de quelle relation l'un est différent de l'autre, car il est déterminé comme le distinct en soi sans qu'aucun contenu réel ne soit posé par rapport auquel il serait distinct ».

§3.2 Allgemeine Formenlehre

Le premier chapitre de l'ouvrage s'intitule « Uebersicht der allegemeinen Formenlehre ». Grassmann indique dès le début ([26] p. 1 ; p. 33) que par théorie générale des formes, il entend « la série de vérités qui se rapportent à toutes les branches des mathématiques de la même manière et qui ne supposent donc que les concepts généraux d'égalité, de diversité, de liaison et de séparation ». Au § 2, il introduit les concepts mathématiques de base : « Verknüpfung », « Glieder », « Ergebniss », qu'il convient de traduire par respectivement : association [31], membre et résultat. À la différence de ce que nous faisons de nos jours, Grassmann considère d'ordinaire non pas l'opération mais l'un des membres de l'égalité qui la définit et c'est cela qu'il baptise « association ». L'opération elle-même — bien que l'auteur n'ait pas de mot pour le dire — est notée $\cup$. Les propriétés des opérations, sont présentées d'une manière rhétorique, par des considérations de type philosophique, sans dénomination particulière. Et on comprend le désarroi des (rares) lecteurs, notamment celui qu'exprime Möbius à plusieurs reprises (il est membre du jury et rapporteur du prix de la *Jablonowski'schen Gesellschaft* de Leipzig, que Grassmann remportera, comme seul candidat, en 1844 avec sa *Geometrische Analyse)* allant jusqu'à proposer de faire lire par Drobisch, qui lui est mathématicien *et philosophe*. [32] Je donne en note [33], à titre d'exemple, l'énoncé de l'associativité et de la commutativité ; on doit dire que sur ce point précis, tant l'école anglaise que l'équipe des *Annales de mathématiques pures et appliquées* avaient fait mieux. On s'étonnera que la lecture de Hankel ne l'ait pas amené à changer d'avis sur ce point et qu'il maintiendra intégralement sa manière de procéder dans l'édition de 1877. (Voir [34])

L'association - ou si l'on préfère, l'opération - donnée, Grassmann la désigne par l'épithète « synthétique ». Le procédé analytique, quant à lui, consiste « en la recherche d'un membre de l'association, l'association elle-même et son autre membre étant donnés ». Ce procédé analytique sera noté $\cup$. Notre égalité a -b + b = a est ainsi un cas particulier de $a \cup b \cap b = a$. (p. 3 ; p. 37) Hankel a clairement puisé son inspiration (opérations thétiques, lytiques) dans ce texte, mais il a su donner à sa présentation un tour mathématique, qui rend l'exposé immédiatement lisible par un mathématicien. Il a aussi débarrassé cet exposé des aspects philosophiques encombrant, sachant les placer dans des parties *ad hoc*.

Au §7, Grassmann présente la notion de « forme indifférente »; on l'obtient par l'association « analytique de deux formes égales, donc $a \cup a$ représente la forme indifférente et celle-ci est indépendante de la valeur de a ». Enfin au § 9, il envisage la possibilité de « deux espèces différentes d'associations synthétiques », le seconde s'exprimant par le signe. Dans la partie consacrée à la géométrie, cette théorie des formes est directement appliquée. Par exemple, l'addition de segments colinéaires est une association synthétique. (p. 14 ; p. 50)

§3.3. Lehrbuch der Arithmetik de Hermann Grassmann (1861)

En 1861, H. Grassmann publie à Berlin sous le titre *Lehrbuch der Arithmetik für höhere Lehranstalten* [10] un ouvrage qui, comme nous l'explique l'auteur, entend présenter une arithmétique « rigoureusement scientifique », à la différence des ouvrages existant. Il poursuit aussi un objectif pédagogique, car il est explicitement écrit et pensé comme manuel élémentaire d'enseignement (« für den ersten wissenschaftlichen Unterricht »), un rêve chimérique s'il en est. L'avant-propos, auquel Grassmann consacre ces explications, contient des considérations pédagogiques intéressantes; en particulier cette remarque, que l'on retrouve souvent depuis le XVII^e^ siècle, mais qui porte d'ordinaire sur la géométrie : l'enseignement des mathématiques est le seul qui soit en mesure d'exercer l'élève à une pensée logique conséquente (p. 296).

Dans « l'Introduction » du §1 (pp. 298-299), Grassmann présente quelques définitions : les mathématiques, la grandeur, l'égalité. L'égalité est définie non ontologiquement, mais d'une manière purement opératoire : égal est dit de deux choses lorsque, dans tout énoncé [« Aussage »], l'une peut se substituer à l'autre. Un terme est introduit sans définition, celui de « Verknüpfung ». « L'arithmétique manipule celles des grandeurs qui sont engendrées à partir d'une seule unité e par « Verknüpfung ». On n'est pas loin de l'idée de groupe cyclique.Vient ensuite l'addition, qui est en même temps le processus d'engendrement de l'ensemble par passage au successeur : b = a + e est le successeur de a, alors que a = b+-e en est le prédécesseur, - e étant l'unité négative. Les alinéas 7 à 26 sont consacrés à l'addition. D'abord 0 est introduit comme somme d'une unité positive et d'une unité négative, avec aussi la convention de noter 0+-e = - e. Voici quelques propositions relatives à cette « Verknüpfung » :

§ 2.20 e + a = a + e. La démonstration de cette proposition utilise explicitement [35] la méthode de récurrence, comme Grassmann le précise dans la note qui suit.

§ 2.21 $-e + a = a + -e$

§ 2.22 $a + (b + c) = a + b + c$

§ 2.23 $a + b = b + a$

§ 2.27 « Hypothesis $a + b = a + c$
Thesis $b = c$. »

Le §3 traite de la soustraction ; on y trouve en particulier les propositions :

§ 3.36 $a - a = 0$

§ 3.41 $- a + -b = -a - b = - (a + b)$.

La multiplication est introduite au §4 à partir de l'égalité a.1 = a. C'est dans ce paragraphe (définition 54) que Grassmann parle de nombres positifs et négatifs : « les nombres qui suivent 0 sont dits <positifs> et ceux qui le précèdent <négatifs> ».

« Définition. La multiplication avec les autres nombres (excepté 1) est déterminée par les formules :

(56) $a . (\beta + 1) = a\beta + a$, où β est un nombre positif

(57) $a . 0 = 0$.

(58) $a . (-\beta) = - (a\beta)$, où β est un nombre positif ».

§ 4. 60 « Le produit *a* est une grandeur qui appartient à la même série que le multiplicant *a* ».

Dans le raisonnement par induction qu'utilise la preuve, la base d'induction est l'égalité $\beta = 1$, qui découle de la définition même $a . 1 = a$; ensuite la proposition est valable pour $b = 0$ par (57).

§ 4.62 On a généralement $a (b + 1) = ab + a$.

§ 4.71 $1.a = a$.

§ 4.72 $\alpha\beta = \alpha\beta$

§ 4.74 $0. \propto = \propto . 0 = 0$.

§ 4.75 $a (-\beta) = a (-\beta) = -a \beta$.

§ 4.76 $(-a) (- \beta) = a \beta$.

Le *Lehrbuch* de Grassmann n'a bien sûr pas atteint l'objectif pédagogique visé ; il n'a pas non plus intéressé les contemporains. Il n'en marque pas moins une étape importante dans la voie de l'axiomatisation et des définitions implicites. Il est cité par Frege, Peano l'a lu et apprécié, Hankel s'en inspire.

§ 4. *FORMENLEHRE* ODER *MATHEMATIK* (1872) DE ROBERT GRASSMANN

§ 4.1. Généralités

En 1872, avec la collaboration de son frère Hermann, Robert Grassmann publie [36] un ouvrage sur les fondements de la science mathématique, constitué de cinq parties, paginées séparément ; ouvrage qui partagera avec ceux de son illustre frère le redoutable privilège de n'être point lu. La cuisante leçon de *l'Ausdehnungslehre* n'avait servi de rien. Une terminologie inadaptée et inutilement compliquée, un langage philosophique propre à repousser le mathématicien avaient eu raison des efforts des frères Grassmann.

Observant (p. 3) que toutes les présentations des mathématiques supposent la logique, sans que celle-ci ne soit préalablement établie, l'ouvrage propose, ni plus ni moins, une présentation scientifique des premiers linéaments des mathématiques. Il veut éliminer les fautes et autres cercles vicieux des exposés habituels, qui presque tous « tentent de surmonter les difficultés des premiers commencements à l'aide de manières de parler et de paralogismes ». Il a l'espoir, lui, de procéder par les voies « rigoureusement scientifiques ».

R. Grassmann débute par une « introduction à la *Formenlehre* ». Celle-ci

> doit nous apprendre les lois de la pensée rigoureusement scientifique. Elle ne doit pas déjà supposer d'autres lois de la pensée ; car alors, chaque erreur de ces lois rendrait aussi la *Formenlehre* erronée et non scientifique ; ainsi, elle ne doit pas non plus supposer les lois de la langue, ne pas se mouvoir dans les lois et les formes de la langue. Elle ne suppose que la capacité de penser de l'homme (...). ([36] p. 5) [T16].

Grassmann anticipe ici sur Frege en considérant que les langues naturelles sont ambiguës, présentant pour le même mot de multiples acceptions. La *Begriffschrift* répond, quoique d'une manière plus approfondie et plus formalisée, au même genre de préoccupations. Anticipation également sur les travaux de Frege / Dedekind en ce qui regarde la réduction de l'arithmétique à la logique.

L'objet fondamental de la *Formenlehre* est la « Gröse » [37] : on appelle ainsi tout ce qui peut être objet de pensée ou peut le devenir, pour autant qu'il possède une et une seule valeur (p. 7). On ne voit pas trop ce que peuvent être ces sortes d'atomes de pensée. A l'instar de ce que nous avons noté pour son frère Hermann, la définition de l'égalité de deux gröse est opératoire, non ontologique : deux Gröse sont égales « lorsque dans chaque association de la *Formenlehre*, la substitution de l'une à l'autre se fait sans changement de la valeur ». Il convient de rappeler que la notion de « Verknüpfung » est plus vaste que celle d'opération; ainsi a = b est une Verknüpfung. La différence essentielle entre une gröse et un concept réside en ce qu'il peut arriver que deux de ces derniers soient à la fois égaux et inégaux ; ce ne sera jamais le cas pour les gröse. Les gröse sont de deux sortes. Celles qui sont originaires, qui ne résultent pas d'une association, qu'il appelle « Stift oder Element », et les autres. Les premières sont notées (e1, e2, e3, ...). Le signe pour l'association est o. Plus loin (p. 23), Grassmann utilisera le mot « Knüpfung » pour la cas général où aucune propriété n'est requise et « Verknüpfung » pour le cas de la commutativité. Je donne en annexe 2 le détail de sa terminologie très raffinée. Une démonstration, pour être probante, doit pouvoir s'exprimer par une formule ; si elle ne s'exprime que par des mots, elle est fautive. L'objectif de la *Formenlehre* (p. 10) est de déterminer quelles sont les formules égales entre elles.

§ 4.2 Première partie : die Grösenlehre

R. Grassmann s'inspire directement de Leibniz (voir [24]) et observe (p. 17) « qu'il existe une série de lois et d'associations [Knüpfungen] qui sont communes à tous les rameaux de la *Formenlehre*, ainsi les lois de l'égalité, les lois de l'addition ou Fügung, de la multiplication ou Webung [36] ». Ces lois apparaissent dans chacune des quatre parties suivantes de la *Formenlehre* et il est antiscientifique de les démontrer quatre fois. La *Grösenlehre* doit donc précéder ces quatre parties. Comme la logique n'est pas encore construite, on ne peut l'engager dans ces démonstrations. Prenons, pour exemple, la proposition 17 (p. 31) :

Supposition : $a_1 = a_2,\ a_2 = a_3, ..., a_{n-1} = a_n$

Conclusion : $a_1 = a_n$.

La démonstration se fait sur la base de la proposition 16 : si a = c et b = c alors a = b.

L'expression a o (b o c) = a o b o c comprend aussi bien a (b c) = abc que a + (b + c) = a + b + c. Dès lors, cette loi doit être étudiée avant ses réalisations particulières.

L'ordre de l'étude de la *Grösenlehre* est le suivant :

Définitions générales, propositions sur l'égalité, associations pour lesquelles ne vaut ni l'associativité (« Einigung »), ni la commutativité (« Vertauschung »), propositions pour le cas de l'associativité seule, pour la commutativité. Apparaît ensuite une seconde association, notée *, avec la propriété (a*b) c = ac*bc, appelée « Doppelbeziehung ». Dans la deuxième partie de cette section, l'auteur étudie les divers degrés (« Grad ») de la « Knüpfung » : addition, multiplication, exponentiation, ces opérations portant sur des Grösen, non sur des nombres. Ainsi, après avoir défini 0 par l'égalité a + 0 = a, Grassmann établit que a.0 = 0. On a en effet, dit-il : ab = a (b + 0) = ab + a0, qui exige a.0 = 0 (p. 44)

§ 4.3 Deuxième partie : Die Begriffslehre oder Logik

Pour fonder scientifiquement la logique, nous dit Grassmann, nous devons proposer une nouvelle voie, purement formelle, et donner toutes les démonstrations au moyen d'égalités, car seule cette forme de démonstration ne suppose ni grammaire, ni logique (p. 4) (Je rappelle que chaque partie est paginée séparément). Il associe pour cela l'addition au « et » et la multiplication à « l'adjectivité », comme dans « le gros animal saurien », qui représenterait le produit ab. Il s'agit alors de vérifier que cette double attribution possède des propriétés qui permettent l'assimilation aux deux opérations d'addition et de multiplication. Grassmann note que l'on a, en particulier : $a + a = a, \sqrt{aa} = \mathrm{a}, \mathrm{ee} = \mathrm{e}, \mathrm{e}_1 e_{2.} = 0$. Remarquons que les justifications qu'il donne sont empruntées à la flore et à la faune. Tout cela ressemble étrangement à de l'algèbre de Boole, mais il ne paraît pas que les deux frères aient eu connaissance des travaux du savant anglais. Entre les pages 8 et 21, on trouve une trentaine de propositions de logique, représentées par des formules et établies selon la méthode préconisée par Grassman, comme le principe de contradiction ou la loi du tiers exclu, pour citer les plus connus de ces principes. L'examen détaillé de cette partie relève d'une histoire de la logique et je ne m'y attarde pas.

§ 4.4 Quatrième partie : Die Zahlenlehre oder Arithmetik

L'idée directrice de la quatrième partie est la suivante (p. 8). La *Zahlenlehre* ou *Arithmetik* étant une partie de la *Formenlehre*, vaut pour elle toute la théorie de la *Grösenlehre* développée dans la première partie, qu'il convient donc de supposer connue. Et c'est là la seule possibilité strictement scientifique de déduire l'arithmétique du plus petit nombre possible d'hypothèses. Dans le cas contraire, « la seule façon scientifique de faire consiste à introduire les règles de calculs telles que présentées au n° 2 comme principes ; et non pas de faire semblant de les démontrer par des paralogismes [Trugschlüsse], comme c'est le cas dans presque tous les livres d'arithmétique ». (p. 5) Les « règles de calcul » auxquelles il vient d'être fait allusion sont exposées dans la première section (pp. 8-11) et constituent clairement une base axiomatique pour l'arithmétique (voir annexe 3).

§ 5. ELEMENTE DER ARITHMETIK (1872) DE ERNST KOSSAK [38]

Les mêmes griefs à l'encontre des présentations courantes de l'arithmétique se retrouvent chez E. Kossak, qui publie en 1872 un ouvrage intitulé *Die Elemente der Arithmetik.* A l'instar de ce qu'on a pu lire chez les frères Grassmann, on y découvre, dès les premières lignes, des plaintes sur la façon de rédiger les traités d'arithmétique qui « en partie contiennent des imprécisions, en partie dissimulent les difficultés, augmentant par la même les obscurités des concepts, au lieu de les écarter ». (p. 3) En des termes précis, Kossak caractérise le changement de paradigme qui se fait jour dans le monde mathématique à propos des fondements. Il nous rappelle d'abord ce texte de Gauss [39, Bd.2, p. 174], où le maître de Göttingen se penche sur les problèmes d'existence des nombres complexes. Pour lui, l'introduction « d'unités nouvelles » est fondée sur la possibilité d'une signification intuitive (« anschaulich »). Mais actuellement, ajoute Kossak, « cette introduction repose uniquement sur la définition des unités à introduire; ainsi, pour l'admission de l'unité négative, la seule raison est que l'on veut rendre la soustraction en général valable et pour cela on doit admettre une unité qui, additionnée à l'unité positive, donne zéro ». C'est donc le point de vue que nous avons déjà rencontré sous la plume de Hankel. Il poursuit en proposant une règle pragmatique proche du « principe de permanence », mais sans allusion à Hankel.

Selon Kossak, et cela correspond bien à la thèse rappelée dans l'introduction du présent travail, la circonstance décisive pour ce changement de paradigme a été la théorie des fonctions elliptiques, exigeant une pleine connaissance des grandeurs imaginaires. On sait bien, en particulier depuis les travaux de Dugac, que Weierstrass a fait précéder ses leçons par une théorie des divers nombres, leçons dont Kossak fut l'auditeur au semestre d'hiver 1865-1866. C'est dans ces leçons qu'il a puisé les idées directrices de ses réflexions.

§ 6. *LEHRBUCH DER ARITHMETIK UND ALGEBRA* (1873) DE ERNST SCHRÖDER [40]

De la courte biographie que lui consacre Jakob Lüroth [41], son ami de longue date, j'extrais les quatre informations suivantes, qui intéressent assez directement notre étude :

1. Schröder avait un penchant pour les généralisations ; en particulier, il s'intéressait activement à l'extension de la définition de fonctions qui portent sur des nombres naturels au cas d'autres nombres. Lüroth cite à ce propos son premier article de 1867, consacré à des polygones avec un nombre fractionnaire de côtés. (p. 252)
2. En 1872, « suivant la voie ouverte par Hankel », Schröder s'occupe de l'allure que prennent les formules de l'arithmétique, lorsque les opérations satisfont à d'autres règles qu'à celles qui y ont cours habituellement. Lüroth ajoute que ces spéculations, Schröder les a poursuivies sa vie durant, bien qu'il n'ait pas publié grand chose sur le sujet. (p. 254). Notons que Hankel avait déjà initié cette voie dans une situation très particulière. (voir T12)
3. Dès la préparation de son *Lehrbuch* de 1873, Schröder est rendu attentif à la manipulation calculatoire de la logique par la *Formenlehre* de Robert Grassmann. (p. 256)
4. Schröder serait le premier à avoir énoncé l'axiome qui est à la base du dénombrement, à savoir que le nombre est indépendant du processus du dénombrement. (p. 253).

Venons-en à l'ouvrage lui-même, en nous intéressant spécialement aux aspects épistémologiques. L'avant-propos annonce les objectifs poursuivis. Le volume 1 traitera, écrit Schröder, « de manière complète (...) des premiers fondements de la partie purement analytique des mathématiques » ([40], p. III). On remarquera au passage l'adjectif kantien utilisé ici, laissant sous-entendre - c'est de rigueur à l'époque - que la géométrie, elle, n'est pas analytique. Cette objectif de complétude exige (p. IV) que toutes les méthodes engagées soient examinées d'une façon critique.

Arrêtons-nous au chapitre 4, IIe partie (§ 78), dont le titre et le sous-titre sont particulièrement instructifs : « Les associations opératives [« Die Operationenverknüpfung »] en traitement formel », « Tendances de l'algèbre formelle ». Schröder raisonne par analogie avec les sciences physiques, où il est de la plus haute importance, dit-il, de séparer les causes des phénomènes; de même dans les enchaînements purement déductifs, une claire séparation des prémisses et « de les examiner séparément selon leurs conséquences ». (p 232) « L'observation de cette manière de faire, écrit-il ensuite, n'est en fait pas seulement instructive, mais indispensable pour la bonne connaissance de leurs connexions réciproques. Et de même que c'est essentiellement à cette tendance que, par exemple, toute la nouvelle géométrie appelée absolue ou Pangéométrie doit sa naissance, de même elle est à la base de l'algèbre proprement formelle ou absolue ». [T17]

La comparaison avec la géométrie non euclidienne demande quelques éclaircissements. En 1873, cette discipline vit sa seconde naissance, après les incompréhensions rencontrées par ses pères fondateurs dans les années trente, mais rencontre encore bien des oppositions, même dans le monde mathématique avancé. Dans ce passage, en vrai logicien, Schröder place la question sous son juste éclairage, qui est épistémologique. L'idée de transporter sur l'algèbre ce principe méthodologique, et jusqu'à reprendre l'épithète « absolu » proposé par Bolyai pour la géométrie, est originale ; elle rapproche les deux grandes branches des mathématiques, les plaçant dans une perspective commune. Schröder nous montrera une application explicite de ce principe méthodologique à la page 234 : toutes les propriétés de la multiplication commune, qui culminent dans le théorème énonçant que « l'ordre des processus multiplicatifs, soit que la succession et le groupement des facteurs est quelconque, sont la conséquence rigoureuse » des deux théorèmes simples relatifs au cas de deux, respectivement trois, facteurs. C'est là le début de l'étude de la « Separation der Prämissen ».

Les § 78 et 79 sont dignes d'attention pour d'autres raisons encore. On y peut lire une succession de réflexions qui, prises ensemble, constituent une sorte de doctrine bien proche de l'axiomatique moderne, telle qu'elle apparaîtra à la toute fin du siècle. Je les cite ici dans un ordre différent de celui proposé par Schröder, en me servant le plus souvent de son texte même. Précisons qu'il n'avait sans doute pas conscience de la révolution considérable qu'il aidait ainsi à s'opérer.

1. Arbitraire des prémisses :

Si la dérivation des propriétés de base de ces opérations de l'arithmétique n'est possible qu'avec le recours aux nombres naturels eux-mêmes, dans le cas de l'algèbre formelle ce moyen n'existe plus, elles ne peuvent plus se démontrer, mais doivent être acceptées ou refusées hypothétiquement, arbitrairement, comme prémisses. (p. 234) Resterait alors éventuellement, selon Schröder, « à traiter ensuite la question de savoir dans quelle mesure celles-ci sont remplaçables par d'autres d'égale portée ». On note la différence et le progrès par rapport au principe de permanence des lois formelles de Hankel. On a très envie, malgré les anathèmes qu'elle eût à subir, de rappeler à ce propos la loi des trois états de Comte. L'algèbre des nombres a d'abord vécu un stade dans lequel ceux-ci étaient des productions mystiques, l'œuvre directe de Dieu pour les entiers naturels. Puis, est venue la phase dominée par le principe quasi-métaphysique de permanence. Enfin, le stade positif des propriétés arbitraires ou hypothétiques, comme définies par Schröder dans ces § 78 et 79.

2. Consistance :

« Du fait donc que les conditions 1°) à 7°) [voir annexe 4] reposent sur des lois d'opérations réelles, il s'ensuivra en tout cas qu'elles sont compatibles entre elles; dès lors aucune d'elles ne pourra être en contradiction avec les autres. » (p. 237) [T18].

3. Indépendance :

« De plus, il est aisé de voir que ces hypothèses sont aussi dans l'ensemble indépendantes les unes des autres, c'est-à-dire qu'il ne sera jamais possible de déduire complètement ou même partiellement l'une des autres » (pp. 236-237) [T19].

4. Modification des prémisses :

« Abstraction faite de cela, nous donnerons plus loin des indications suffisantes sur l'indépendance réciproque des prémisses 1°) à 7°), quand, par certaines opérations (supérieures) (ou nombres), les unes ou les autres de ces hypothèses ne sont pas valables ou viennent à disparaître, sans que les autres n'en soient perturbées » (p. 237) [T20].

Il y a, bien sûr, un parallèle à établir entre l'idée de laisser en quelque sorte tomber certaines hypothèses, ou de les nier, et l'idée des géométries « non quelque chose », qui fleuriront à la fin du siècle. On attribue d'ordinaire la pensée nouvelle qu'on lit dans ce passage, aux travaux engendrés par la crise non euclidienne, et qui s'étendent sur les trente dernières années du siècle. Les réflexions de Schröder ou des auteurs que nous envisageons dans la présente étude, suggèrent une autre explication pour ce mouvement, une explication complémentaire. A cause de l'inéisme qui lui est souvent attaché, l'arithmétique n'est pas en mesure de susciter, même à titre hypothétique, des recherches autour de systèmes fondés sur des prémisses différentes de celles généralement admises. Pour des raisons moins fortes mais voisines, il en va à peu près de même de la géométrie, à preuve l'épopée non euclidienne. Dans une pensée formelle, telle qu'elle se développe autour d'ensembles d'éléments vides de toute individualité et de toute personnalité, une pareille attitude se conçoit mieux, n'ayant pas à évoluer à contre-courant.

5. Perte de l'individualité :

La perte d'individualité des entités se manifeste dans ce passage de la page 233, en italique dans le texte : *en nombres généraux sur la nature desquels aucune autre hypothèse n'est faite.*

S'il y a doute sur l'affirmation de Lüroth évoquée au début de ce paragraphe (point 4), on sera en revanche certain que « l'axiome d'inhérence des signes » (« Axiom von der Inhärenz der Zeichen ») [40, p. 16] lui appartient en propre :

> (...) du reste, cette hypothèse est contenue dans une hypothèse encore plus générale, qui constitue un axiome de chaque science déductive. (...). Le principe évoqué pourrait bien être nommé l'axiome de l'inhérence des signes. Nous avons la certitude que, dans tous nos développements et déductions, les signes adhèrent à notre mémoire encore plus fortement qu'au papier. Le nombre de uns que nous écrivons ne change par exemple pas pendant que nous les transposons ou transportons (...). Les lettres demeurent égales, pendant que nous opérons avec elles ; un a ne deviendra jamais un b. Sans ce principe, que nous obtenons à partir d'une très riche expérience par des extensions inductives ou des généralisations, toute déduction deviendrait illusoire. (p. 16) [T21].

Un peu plus loin, Schröder opère avec pertinence le rapprochement entre cet axiome et le principe tacitement admis de la constance des unités de mesures de longueurs, engagées dans la comparaison de segments. Le surgissement de cet axiome appelle un commentaire. La nécessité soudaine de mettre de l'ordre et d'énoncer jusqu'aux plus grandes évidences, relevant par exemple comme celle-là de la psychologie autant que des mathématiques, révèle un état d'esprit nouveau, dont il n'est pas aisé de dire l'origine. Les causes proposées au début de cet article fournissent assurément une partie de l'explication. Il convient aussi de noter dans cet ouvrage de Schröder l'exigence d'une composante logique claire et avouée aux sources de l'arithmétique, ou au moins une interférence de l'une et de l'autre, ainsi que ce sera le cas dans plusieurs ouvrages de cette période. Schröder écrit à ce propos (p. 146) : « où les domaines de la logique et de l'arithmétique s'interpénètrent (comme c'est le cas dans mon livre) ». (Voir aussi [42]).

§7. LES VORLESUNGEN ÜBER ALLGEMEINE ARITHMETIK (1885) DE OTTO STOLZ [43]

De la nécrologie que lui consacre J. A. Gmeiner [44] (avec qui il publiera une *Theoretische Arithmetik*, 1900-1902), nous retiendrons que Stolz fut en 1869 l'élève de Weierstrass, dont l'œuvre analytique le marquera profondément, une période où le mathématicien allemand commence à enseigner dans ses cours les nouveaux fondements des nombres réels.

Les premières lignes de l'avant-propos caractérisent, à leur manière, la situation de l'arithmétique en cette fin de XIX^e siècle : « Celles des théories de l'analyse, qui sont d'ordinaire considérées comme sa partie élémentaire, ont été, dans les derniers temps, retravaillées et essentiellement améliorées. Les présentations populaires-pédagogiques diffèrent actuellement de celles des éléments de mathématiques au point que presque chaque manuel ou cours d'analyse supérieure est ouvert par un précis relatif aux Eléments » ([43]. Avant-propos, p. III) [T22]

Dans le même avant-propos (p. III), Stolz nous indique ses sources : « le concept de grandeur est fondé d'après H. Grassmann, la théorie des nombres naturels selon la présentation exemplaire de E. Schröder et celle des rationnels d'après les considérations de Hankel sur l'association des grandeurs en général ». Stolz choisit d'ailleurs de présenter son étude avec le vocabulaire imaginé par Hankel : opérations directes ou thétiques, inverses ou lytiques, modules.

« Le calcul, c'est-à-dire l'association des grandeurs, forme le fondement des mathématiques pures » (p. 1). L'un des ressorts de son ouvrage est l'intérêt qu'il y a, selon lui (p. 25), de fixer une fois pour toutes « ce qui découle de certaines hypothèses formelles sur une association [Verknüpfung] ». C'est là l'expression d'une volonté qui se fait jour dès le début de la décennie 1860, mais qui n'est guère explicitée.

Avec le livre de Stolz, on arrive pratiquement au terme de la période propédeutique : les mathématiciens ont exploré diverses voies pour une présentation des fondements de l'algèbre et de l'arithmétique, une voie qui soit exempte de difficultés métaphysiques. Certes, l'axiomatique de Dedekind / Peano est encore à venir, mais, quelque spectaculaire qu'elle soit, elle ne modifiera plus fondamentalement la donne. Mis à part des lourdeurs et des maladresses de forme - qui tiennent davantage à la nouveauté du sujet qu'à une faiblesse de l'auteur - la présentation de Stolz est celle qu'on lira dans les traités du XX^e siècle.

Je décris sommairement la structure générale de la « Théorie analytique des nombres rationnels », telle que Stolz la propose dans la IIIe section (pp. 25-57). Il enchaîne une série d'hypothèses, qui spécifient de plus en plus les propriétés des opérations, qu'il applique à un « système a, b, c, ... », appelé « système (I) ».

Hypothèse A) : « Toute paire de grandeurs (a b) se laisse associer d'une manière unique et le résultat est un élément (c) du système; on utilise pour cela la notation a o b = c ».

Suivent deux théorèmes :

Le théorème 1 utilise l'hypothèse B) : (a o b) o c = a o (b o c).

Théorème 1. Si la thèse ternaire est associative, alors elle l'est pour un nombre quelconque d'éléments.

Le théorème 2 se fonde sur l'hypothèse C) : a o b = b o a.

Théorème 2. Toute thèse associative est aussi commutative, dès lors qu'elle l'est pour la thèse à deux éléments. (pp. 26-27)

L'associativité et la commutativité sont complètement indépendantes l'une de l'autre, (p. 26) et il en donne pour preuve (p. 330) l'opération définie par la moyenne arithmétique, qui est commutative sans être associative. Stolz introduit ensuite l'opération lytique, notée : $x \circ b$.

Les hypothèses D), D1) envisagent diverses possibilités pour les solutions de l'équation $x \circ b = b \circ x = a$.

Au § 6, deux opérations thétiques notées o et Θ sont introduites et traitées avec $\cup$ pour la lyse de Θ, puis diverses formes de distributivité :

$(a \circ b)\, \Theta\, c = (a\, \Theta\, c) \circ (b\, \Theta\, c)$

$a\, \Theta\, (b \circ c) = (a\, \Theta\, b) \quad (a\, \Theta\, c)$.

Jusqu'au paragraphe 7, il était admis que l'opération inverse pouvait ne pas être partout définie, ce qui limitait la généralité de certaines formules. « Nous voulons maintenant poser [aufstellen] de nouvelles grandeurs, qui doivent compléter le système (I), de telle manière qu'elle satisfassent les équations $b \circ x = a$ encore insolubles, et avec lesquelles on puisse calculer à partir des mêmes règles qu'avec les grandeurs d'origine » (p. 34). D'où la définition :

> Lorsque dans le cas D1) l'équation $b \circ x = a$ n'est satisfaite par aucune grandeur du système (I), alors elle doit l'être par une et seulement une nouvelle chose (« Ding ») ne se présentant pas dans (I) et qui peut être désignée par $a \quad b$. (...).
>
> Etant donné que les nouveaux objets [Objecte] ne possèdent aucune autre propriété, on peut leur en attribuer comme on le souhaite, pourvu qu'elles ne se contredisent pas entre elles. Tout d'abord, on fait de ces choses des grandeurs, par la distinction de celles d'entre elles qui sont égales ou inégales (...). (p. 34).

Le contact avec le monde des choses est totalement perdu : pour les inverses il n'y a plus ni dettes, ni température, on est dans le formel pur. Ainsi, l'égalité de deux « neue Dinge » $a \cup b$ et $a' \cup b'$ est-elle définie par l'équivalence :

$$a \cup b = a' \cup b' \iff a \circ b' = a' \circ b \text{ . (p. 31)}$$

Il convient ensuite d'étendre les opérations aux nouveaux objets :

> Les nouveaux $a \quad b$ sont ainsi devenus des grandeurs qui, à la différence du système original (I), forment le système (II). (...).
>
> Essayons maintenant de définir une association thétique o entre les anciennes et les nouvelles grandeurs et pour les nouvelles grandeurs entre elles, de manière que soient conservées les règles d'associativité et de commutativité justement admises pour les grandeurs (I). (p. 35).

Il n'est pas dans mon intention de suivre le détail de la procédure de Stolz. J'indiquerai seulement ceci : après avoir décrété au titre de définition (p. 35) certaines égalités relatives à des opérations portant sur des éléments du système (II), il établit, dans le théorème VI, que l'opération o est alors partout associative et commutative, et que la lyse est partout possible et univoque.

Voici encore quelques indications sur la suite de cette section III. Au paragraphe 8, Stolz fait remarquer que, en conséquence du théorème VI, il n'est plus nécessaire dans les formules d'observer une différence entre les éléments des systèmes (I) et (II). Au paragraphe 9, il introduit, à la suite de Hankel, les notions de modules (éléments neutres) et de réciproques ou inverses (symétriques).

Après avoir traité en détail de ce que nous appelons les entiers relatifs, Stolz introduit les nombres rationnels. Il le fait selon deux méthodes ontologiquement différentes. La première présentation (section III), qu'il qualifie « d'analytique », est, selon notre terminologie actuelle, « syntaxique ». Les entités sont définies implicitement par une égalité symbolique, qui est l'objet de la définition (p. 43) : « Dans le cas où le nombre naturel a n'est pas divisible par un autre b, il doit exister une chose et une seulement, que nous désignerons par $a : b$ et satisfaisant à l'égalité : $b.(a : b) = (a : b).b = a$ ». Dans la « théorie synthétique des nombres rationnels », objet de la IVe section, on part d'unités que l'on décompose et à partir de quoi on établit successivement les propriétés des rationnels.

Le paragraphe 14 (pp. 49-51) retiendra spécialement notre attention. En introduisant la multiplication et la division des nombres rationnels, Stolz nous procure une excellente occasion de mesurer l'état nouveau atteint par l'arithmétique dans ces années là, et avant l'épisode — prenons le mot au sens aristotélicien de « partie du drame entre deux entrées, et au sens d'accident accessoire » — Peano/Dedekind. C'est la définition 10 qui dirige la manœuvre : « Définition : $a - b$ et $a' - b'$ [lettres grecques dans l'original] sont le nombre zéro ou des nombres négatifs, alors que l'on ait

$(a - b) . c = c . (a - b) = ac - bc$ (1)

$(a - b) (a' - b') = (aa' + bb') - (ab' + ba')$ (2) (...) » (p. 49).

Sous cette hypothèse (« Voraussetzung »), Stolz établit une série de « généralisations des règles fondamentales de l'algèbre » :

- commutativité et associativité de la multiplication, distributivité ;
- $0.A = A.0 = 0$;
- si un produit $AB = 0$, alors l'un au moins des facteurs doit être nul ;
- $(-A) B = B (-A) = -AB$, $(-A) (-B) = AB$, où AB désigne un nombre rationnel quelconque.

La théorie des nombres réels de Stolz présente, dans la perspective de notre étude et du point de vue de l'histoire de l'axiomatique, un intérêt que j'aimerais mettre en évidence. Il vaut la peine de citer tout le début de la Ve section, où il s'agit d'abord de grandeurs rationnelles :

> 1. Grandeurs absolues. Nous discuterons d'abord quelles sont les propriétés qui sont attribuées aux systèmes de grandeurs géométriques c'est-à-dire aux lignes, angles, surfaces, corps abstraction faite de l'extension. (...). Plus loin il s'agira de la recherche des propriétés nécessaires et suffisantes, c'est-à-dire de celles à partir desquelles les autres dérivent. Les grandeurs de l'un de ces systèmes, désignées dans la suite par A, B, C, ... satisfont aux demandes suivantes.
>
> I.) Deux quelconques d'entre elles peuvent être soit égales, soit inégales et dans ce dernier cas l'unr d'elles peut être désignée comme la plus grande, l'autre la plus petite.
>
> II.) Les grandeurs peuvent s'additionner (ou se multiplier) comme les nombres naturels, en particulier, la somme de deux grandeurs du système est une grandeur du système.
>
> III.) Dans le cas $A > B$, il existe dans le système une et une seule grandeur X telle que $B + X = A$. [45]
>
> IV.) Chaque grandeur A est décomposable en un nombre fini ou infini de parties égales et semblables, c'est-à-dire qu'il y a dans le système une grandeur X de manière que $nX = A$, où n peut signifier soit chaque nombre entier soit certains d'entre eux.
>
> V.) Si $A > B$, alors il y a un multiple de B, qui est plus grand que A : $pB > A$. (p. 69) [T23].

A cette présentation quasi-axiomatique, il convient d'ajouter des démonstrations d'indépendance que Stolz propose sitôt après et aussi plus loin dans les notes. D'abord, pp. 69-70, où il établit que V.) ne peut pas être déduite des autres propriétés, car « il y a des grandeurs, comme par exemple <<l'infini des fonctions>> introduit par P. du Bois-

Reymond, qui satisfont aux demandes [Forderungen] I.) - IV.), mais pas V.) Les postulats [Postulate] I.) - IV.) sont, comme il est facile de le voir, formellement indépendants ». Dans une note relative à la Ve section (pp. 331-332), Stolz établit que « III. ne se laisse pas dériver de I et II » : si on enlève « dans la suite sans fin des nombres naturels le début (de 1 à un certain nombre), il reste un système de grandeurs qui satisfont encore aux demandes I. et II. En même temps, l'équation $b + x = a$ n'est pas toujours satisfaite par une grandeur de ce système ». On est ici en présence des premiers modèles - idée que l'on fait souvent remonter aux *Grundlagen* de Hilbert — « pathologiques », destinés à établir l'indépendance d'une proposition par rapport à un ensemble de propositions. Le modèle emprunté à du Bois-Reymond appartient d'ailleurs par l'esprit à la famille de ceux auxquels aura recours Hilbert, lorsqu'il établira l'indépendance de certains de ses axiomes de la géométrie.

§ 8. FREGE

Dans le grand débat épistémologique des années 1870, d'où sortira une restructuration radicale des fondements des mathématiques, Frege occupe une place de choix. Sa position est intéressante à divers titres. Il a consacré une part importante de son œuvre et de sa correspondance (en particulier sa correspondance avec Husserl et Hilbert) à la clarification des fondements de l'arithmétique, de la géométrie, au statut ontologique de leurs entités de base; par la date de ses écrits, qui sont quasi contemporains des travaux examinés jusqu'ici, par l'aspect philosophique de sa démarche, par le fait aussi que cette démarche est à l'origine celle d'un mathématicien, confronté à des questions internes à sa discipline et qui le conduiront à cette métamorphose bien digne d'attention. Plusieurs études ont été consacrées à cet aspect de l'oeuvre de Frege et je me contente ici d'une synthèse sommaire, le détail dépassant largement le cadre de cette étude.

Il faut commencer par rectifier une erreur que Frege lui-même a aidé à accréditer. Reportons-nous pour cela aux deux lignes causales mises en évidence au début du présent article et dont on a, je crois, trop peu pris conscience. L'une d'elles passe par l'introduction d'une rigueur nouvelle, nécessitée par les situations pathologiques qu'a connues l'analyse du XIX^{e} siècle et dont les principaux protagonistes sont Cauchy et Dirichlet, puis Weierstrass. Une analyse détaillée enseigne que Frege ne s'inscrit pas dans ce courant.

On note chez lui une méfiance, pour ne pas dire plus, à l'endroit des conceptions formalistes, à l'endroit de ce que pourrait être une définition créatrice d'êtres. C'est ainsi qu'il écrit à Husserl (24 mai 1891) : « Pour l'usage scientifique, il faut aussi que les références ne fassent pas défaut. Dans les *Fondements*, je n'avais pas encore opéré la distinction entre « sens » et « référence ». [46, p. 27] » . Et un peu plus tard (18 juillet 1891): « Je suis tout-à-fait d'accord avec vous pour rejeter l' « arithmétique formelle » telle qu'elle est présentée habituellement de nos jours, c'est-à-dire non seulement comme une extension (certes très importante) de la technique arithmétique, mais encore comme une *théorie* de l'arithmétique » [46, p. 35]. Cette méfiance se prolonge naturellement à la fois - (mais les choses sont liées) - à la manière dont Hankel et les formalistes conçoivent les extensions de l'ensemble des nombres et aux définitions implicites. Le passage suivant d'une lettre de Frege à David Hilbert, du 6 janvier 1900, ne laisse pas d'être clair sur le point de vue de Frege:

> Les caractéristiques que vous indiquez pour vos axiomes sont bien tous d'un ordre supérieur au premier ; cela signifie qu'ils ne répondent pas à la question de savoir quelles sont les propriétés que doit avoir un objet pour être un point (respectivement une droite, un plan) (...). Ce sont nos points de vue sur votre critère de l'existence et de la vérité qui sont le plus manifestement opposés l'un à l'autre. [46, p. 74] [T24].

Comme l'écrit aussi Desanti dans sa postface :

> Cet « essentialisme » de principe entraîne deux conséquences, qui valent également l'un pour l'autre.
>
> 1. - Les extensions du champ des objets mathématiques (nombres entiers naturels, nombres entiers rationnels, nombres réels, nombres complexes, nombres idéaux de Kummer) ne peuvent être pensées comme de simples fictions commodes propres à généraliser le calcul et admissibles sans autre remords pourvu que l'usage réglé des signes qui les désignent n'entraîne pas de contradiction. [23, p. 85].

NOTES

1.Voir par exemple : Jean-Claude Pont, Géométrie et Evidence, *Histoire de Géométries,* Textes du Séminaire de l'année 1997, Fondation Maison des Sciences de l'Homme, Paris, pp. 39-52.

2. Jean-Claude Pont, Aux sources du Conventionalisme, in M. Panza et J.C. Pont (éd.), *L'épistémologie des savants vers la fin du XIX^e^ siècle*, Actes du Colloque international « L'épistémologie des savants vers la fin du XIX^e^ siècle », (Genève du 4 au 6 mai 1993), Paris, Blanchard, 1995, pp. 109-144.

3. Les deux citations suivantes, de Weierstrass (relative à un cours donné en 1874) et Cantor (1885), sembleraient démentir ce point de vue, en faisant valoir que les réflexions autour des fondements de l'arithmétique sont elles aussi le fruit de l'état de crise où se trouvera l'analyse vers 1870. Mais on doit observer que, d'une part, ces textes sont relativement tardifs et que, d'autre part, le mouvement vers les fondements *en arithmétique*, déjà amorcé par un effet de ce que j'appellerai plus bas la « seconde ligne causale », forcit avec la crise de l'analyse.
« Les principales difficultés de l'analyse supérieure, écrit Weierstrass, viennent précisément d'une présentation floue et pas assez détaillée des notions de base et des opérations arithmétiques ». (Voir Pierre Dugac, Éléments d'analyse de Karl Weierstrass, *Archive for History of Exact Sciences*, volume 10, 1973, pp. 41-176, en particulier pages 56 et 58 ; la citation se trouve p. 77).
Cantor observe de son côté dans une recension d'un ouvrage de Frege : « Le but de ce petit écrit, à savoir de soumettre les fondements de l'arithmétique à une nouvelle recherche, est louable car cette branche des mathématiques, qui sert de base à toutes les autres disciplines, exige un examen de loin plus approfondi de ses concepts fondamentaux et de ses méthodes que ce qui était en général le cas jusqu'ici. On doit reconnaître encore que l'auteur a saisi le bon point de vue en posant l'exigence qu'aussi bien l'intuition spatiale que temporelle, et en même temps tous les moments psychologiques, doivent être écartés des concepts et des axiomes de l'arithmétique, car ce n'est que de cette façon que l'on peut obtenir sa rigoureuse pureté logique, et ainsi la légitimité d'appliquer les moyens de l'arithmétique aux objets intuitifs du savoir ». (Georg Cantor, Besprechung von Freges Grundlagen der Arithmetik, *Deutschen Literaturzeitung,* 6. Jahrg, no 20, 16 mai 1885, pp. 728-729).

4. Cette sensibilité est assurément moins développée à l'époque chez les chercheurs de langue française. J'en veux pour preuve le traité d'algèbre de Joseph Bertrand (et Henri Garcet) (*Traité d'algèbre. Première partie,* 7e édition, Paris, Hachette, 1870 (conforme à la 3e édition de 1862)). La 19^e^ édition, toujours inchangée, paraît en 1908. On peut lire p. 15 : « 20. CONVENTIONS QUI INTRODUISENT LES NOMBRES NEGATIFS POUR SIMPLIFIER LES ENONCES. La forme des résultats précédents peut se simplifier à l'aide d'une convention très utile en algèbre. Cette convention consiste à *regarder tous les termes tant positifs que négatifs d'un polynome comme* AJOUTES *les uns aux autres*. (...). L'expression isolée (-b), que l'on nomme nombre négatif n'acquiert pour cela aucune signification (...) ». Le commentaire n'est pas utile !
On peut rappeler aussi les réactions, plus que réservées, du milieu mathématique français, devant les recherches d'une rigueur nouvelle; on connaît les remarques faites à Darboux à propos de son grand mémoire d'analyse, ou les réactions de Poincaré, attaché à la traduction de Cantor, devant les passages philosophiques de ces textes, et on se souvient d'Hermite disant, désabusé, à Mittag-Leffler son peu d'intérêt pour les réflexions de Kronecker sur les nombres.

Je signale encore le cas de Jules Houël, confirmant cette impression en se présentant lui-même comme une exception. Ce texte, extrait d'une lettre à Gaston Darboux du 31 mai 1875, confirme aussi notre thèse relative à l'existence d'un courant d'idées autour des fondements de l'arithmétique bien antérieur aux chambardements de l'analyse et de la géométrie des années 1870 :

> Depuis que je suis sorti des mains de Duhamel, j'ai continué à suivre l'impulsion qu'il m'avait donnée, et j'ai, depuis bientôt trente ans, employé toute ma ration d'intelligence à chercher à comprendre ce que c'est que le commencement des mathématiques. J'ai toujours été traité d'hérétique, de métaphysicien, etc. etc., par les non-philosophes (...). C'est ainsi qu'aujourd'hui il est peu de géomètres sérieux qui prétendent qu'on peut définir la ligne droite comme le plus court chemin, ou qui jettent les hauts cris contre la géométrie non- euclidienne [sic]. (Gaston Darboux, Archives de l'Académie des sciences, dossier personnel. Lettre de Houël du 31 mai 1875, du 19 janvier 1874).

5. Marie-José Durand, George Peacock, 1791-1858, La synthèse algébrique comme loi symbolique dans l'Angleterre des réformes. Thèse soutenue à l'Ecole des Hautes Etudes en Sciences sociale, Paris, 1985.
6. Ecole aussi dite des « Algébristes de Cambridge » ou encore « Analytical Society » (voir par exemple S.B. Diagne, Boole. *L'oiseau de nuit en plein jour*, Paris, 1989, Belin, Un savant une époque, p .247).
7. § 20, p. 17 ; citation empruntée à Lubos Novy, *Origins of Modern Algebra* (Leyden, 1973, Noordhoff International Publishing, p. 84).
8. G. Peano, Sul concetto di Numero, *Rivista di matematica*, vol. I, 1891, pp. 87-102.
9. Voir par exemple, outre l'introduction aux œuvres complètes de Grassmann, l'article de Dieudonné : « The Tragedy of Grassmann », *Linear and Multilinear Algebra*, vol. 8, 1979, pp. 1-14.
10. Hermann Grassmann, *Lehrbuch der Arithmetik für höhere Lehranstalten*, Berlin, 1861. Paru également sous le titre *Lehrbuch der Mathematik für höhere Lehranstalte, etc. Erster Theil Arithmetik*, la deuxième partie étant constituée par le L*ehrbuch der Trigonometrie* de 1865. Engel l'a repris dans les *Gesammelte Werke* (Bd. 2, Erster Theil : Die Abhandlungen zur Geometrie und Analysis) [12]. C'est à partir de cette édition que je cite. L'ouvrage est réalisé avec la collaboration de son frère Robert, dont le nom n'apparaît pourtant pas sur la page de titre. (voir p. 295).
11. Hermann Hankel, *Theorie der komplexen Zahlensysteme*, Leipzig, 1867.
12. On le sait indirectement par une lettre de Hankel à H. Grassmann, faisant état d'un témoignage de Schwarz (Lettre à Grassmann du 4 sept. 1867, *in Hermann Grassmanns Gesammelte Mathematische und Physikalische Werke*, Bd.3, Zweiter Teil : Grassmanns Leben Geschildert von Friedrich Engel Nebst einem Verzeichnisse der von Grassmann Veröffentlichten Schriften und einer Übersicht des Handschriftlichen Nachlasses, Leipzig, 1911, Druck und Verlag von G. B. Teubner, p. 277), bien que Weierstrass n'y soit « pas allé profondément ».
13. Voici une ligne de réponse : tout à la joie du nouvel outil, on laisse au second plan les questions sur sa nature, à l'exemple de ce qui s'est passé lors de la naissance de l'analyse: malgré les contradictions qui affligeaient ses fondements, il a bien fallu un siècle pour que l'on se penche sérieusement sur l'essence et le statut ontologique des entités de base. La rigueur, comme l'intendance, vient toujours après, disait René Thom dans son style fleuri.
14. Augustin Cauchy, *Analyse algébrique*, Paris, 1821, p. 173 ff.
15. [11], p. 73.
16. Rowan Hamilton, Theory of Conjugate Functions, or Algebraic couples; with a Preliminary and Elementary Essay on Algebra as the Science of Pure Time. *The Trans. of the Roy. Irish Acad.*, vol. XVII (1837), pp. 293-422. Read November 4th 1833, and June 1st 1835.
17. Robert Woodhouse, On the necessary truth of certain conclusions obtained by means of imaginary quantities, *Phil. Trans.*, 91, 1801, pp. 89-119.
18. John Playfair, On the Arithmetic of Impossible Quantities, *Phil. Trans.*, 68, 1778, pp. 318-343.
19. Hankel ([11], p.V) dira de même qu'il s'agit de fonder « streng wissenschaftlich » la théorie des fonctions d'une variable complexe « dans ses parties essentielles et fondamentales ».
20. Auguste Comte, *Cours de Philosophie positive*, Avertissement de l'auteur, in *Œuvres d'Auguste Comte*, t. 1 Cours de Philosophie positive, Paris, 1968, Ed. Anthropos.
21. Engel parlant de Grassmann. [12, p. 96]
22. Georges Gusdorf, *Le Romantisme*, Paris, 1993, Grande Bibliothèque Payot, t. 2.
23. Gottlob Frege - Edmund Husserl, *Correspondance*, Trans-Europ-Repress, Mauvezin, 1987. Postface de Jean-Toussaint Desanti.
24. L'expression est probablement empruntée à Grassmann, dont Hankel dit s'être inspiré. Ainsi, le premier chapitre de l'*Ausdehnungslehre* s'intitule « Uebersicht der allgemeinen Formenlehre » (p. 33). Quant à

Grassmann, il l'a certainement prise chez Leibniz (*Opera omnia* , ed. Dutens, 1768, Th.3, p. 338; lettre à Vagetius de 1696) qui l'utilise dans le même sens et dont son frère Robert indique la référence [32, p. 17].

25. Reprenant une question d'abord posée par Gauss, puis reprise par Weierstrass, Hankel établit que (11], p. 107) :

> Ein höheres complexes Zahlensystem, dessen formale Rechnungsoperationen nach den Bedingungen des §. 28 bestimmt sind, und dessen Einheitsproducte ins Besondere lineare Functionen der ursprünglichen Einheiten sind, und in welchem kein Product verschwinden kann, ohne dass einer seiner Factoren Null würden, enthält also in sich einen Widerspruch und kann nicht existiren.
>
> Damit ist die Frage beantwortet, deren Lösung Gauss versprochen; aber nicht gegeben hat, « warum die Relationen zwischen Dingen, die eine Mannigfaltigkeit von mehr als zwei Dimensionen darbieten, nicht noch andere in der allgemeinen Arithmetik zulässige Arten von Grössen liefern können ». Jede mögliche Art von complexen Grössen wird sich in ihrer Multiplication durch eine wesentliche Eigenschaft von den gewöhnlichen Zahlen der Algebra unterscheiden müssen.

26. Les citations sont empruntées à la traduction de D. Flament, Hermann Günther Grassmann, *La Science de la Grandeur Extensive. La « Lineale Ausdehnungslehre »,* Paris, 1994, Librairie scientifique et technique Albert Blanchard. Ed. originale allemande 1844. La première référence se rapporte à l'original allemand des *Gesammelte Werke*, la seconde à la traduction. Dans ce cas, je n'ai en général pas transcrit l'original allemand.
27. Grassmann utilise le mot « Grundsatz » que Flament traduit par « axiome »; à cause de l'ambiguïté de ce mot, surtout dans l'histoire qui nous intéresse, je lui ai préféré celui de « principe ».
28. Flament traduit « Begriffe » par « conceptions ».
29. *Hermann Grassmanns Gesammelte Mathematische und Physikalische Werke*, Bd.1, Erster Theil : Die Ausdehnungslehre von 1844 un die Geometrische Analyse, Leipzig, 1894, Druck und Verlag von G. B. Teubner.
30. Engel a placé au début du t. 3 une biographie de Grassmann, où on peut lire cette remarque de Möbius. (voir [12, p. 100])
31. Flament traduit littéralement « Veknüpfung » par « liaison », peut-être « association » convient-il mieux.
32. Je souligne.
33. « Si une liaison est d'espèce telle que qu'on a le droit, sans modifier le résultat, de disposer à volonté les parenthèses pour trois membres et de modifier l'ordre pour deux, alors la position des parenthèses et l'ordre pour un nombre quelconque de membres sont aussi indifférents pour le résultat » [26, p. 3 ; p. 35].
34. On peut suivre dans la courte correspondance échangée entre Hankel et Grassmann, l'influence de celui-ci sur le premier nommé, et se faire une idée de leurs relations. Le 4 juin 1867 [12, pp. 276-277], Hankel adresse à H. Grassmann un exemplaire de son ouvrage. Dans la lettre expédiée simultanément, il prie son correspondant d'écrire pour ce livre une recension à l'intention des Grunerts Archiv, relevant notamment que son « jugement est le seul » qu'il tienne « pour compétent ». Après quelques péripéties sans intérêt, Grassmann rédige cette recension, que Grunert n'est pas en mesure de faire paraître tout de suite, et qu'il finit par ne pas publier. Dans une lettre du 4 septembre 1867 [12, pp. 277], Hankel rapporte à Grassmann qu'il vient d'apprendre, par un cahier de cours, que Weierstrass proposait une « construction précise et soigneuse des concepts élémentaires des nombres imaginaires et réels », avec laquelle il se trouve en plein accord. « Je crois, ajoute-t-il, que mon ouvrage vient à point nommé ; il y a encore une décennie, il aurait été prématuré ; maintenant, en revanche, comme je le vois, ces idées germent partout ».
35. A la différence de ce qu'écrit Jean Dieudonné (*Pour l'honneur de l'esprit humain. Les mathématiques d'aujourd'hui*, Paris, 1981, Hachette, p. 226).
36. Robert Grassmann, *Die Formenlehre oder Mathematik*, 1872.
37. C'est bien l'orthographe choisie par R. Grassmann pour « Grösse ». J'écrirai par la suite ce mot avec une minuscule et sans guillemets.
38. Ernst Kossak, *Die Elemente der Aritmetik*, Programm Friedrichs-Werder. Gymn., Berlin, 1872.
39. *Göttingische gelehrte Anzeigen* du 23 avril 1831, ou Carl Friedrich Gauss, *Werke*, Herausg. E. Schering, F. Klein, M. Brendel und L. Schlesinger, vol. I-XII, Göttingen, 1863-1933, B.G. Teubner. Reprint Georg Olms Verlag, Hildesheim-New York, 1973.
40. Ernst Schröder, *Lehrbuch der Aritmetik und Algebra, Für Lehrer und Studirende*, Erster Band. *Die Sieben algebraischen Operationen*, Leipzig, 1873, Verlag Teubner.
41. J. Lüroth, Ernst Schröder, *Jahresberichte der deutschen Mathematiker Vereinigung*, XII, 1903, pp. 249-265.

42. « Von den über inverse Operationen (für sich) im dritten Kapitel angestellten Untersuchungen können diejeingen des Abschnittes II fast ausnahmslos der formalen Algebra zugezählt werden. Da und dort nur sind in dieselben noch einige allgemeine Untersuchungen auf dem Gebiet der Logik eingeflochten, welche sich unterwegs als nothwending heraussgestellt haben. Im übrigen tritt bei jenen Untersuchungen die Tendenz der Separation schon um ein bedeutendes schärfer zu Tage » [40, p. 234].
43. Otto Stolz, *Vorlesungen über allgemeine Arithmetik. Nach den neueren Ansichten. Erster Theil : Allgemeines und Arithmetik der reelen Zahlen*, Leipzig, Teubner, 1885.
44. J.A. Gmeiner, Otto Stolz, *Jahresberichte der deutschen Mathematiker-Vereinigung*, XV, 1906, pp. 309-322.
45. Dans une note de la page 332, Stolz attribue à Archimède, avec référence, les propriétés III.) - V.). Tout de suite après la présentation de ces propriétés, l'auteur les reprend en les détaillant grâce aux considérations développées dans les sections précédentes. Parmi les douze propositions ainsi présentées, citons la symétrie et la transitivité de l'égalité, la transitivité de la relation >, puis quelques axiomes d'Euclide énoncés en langage symbolique (en particulier : A+B>A).
46. Gottlob Frege, *Wissenschaftlicher Briefwechsel*, Herausgegeben, bearbeitet, eingeleitet und mit Anmerkungen versehen von Gottfried Gabriel, Hans Hermes, Friedrich Kambartel, Christian Thiel, Albert Veraart, Felix Meiner Verlag, 1976, Hamburg.

ANNEXE 1

The Study of Algebra may be pursued in three very different schools, the Practical, the Philological, or the Theoretical, according as Algebra itself is accounted an Instrument, or a Language, or a Contemplation; according as ease of operation, or symmetry of expression, or clearness of thought, (the *agere*, the *fari*, or the *sapere*) is eminently prized and sought for. The Practical person seeks a Rule wich he may apply, the Philological person seeks a Formula which he may write, the Theoretical person seeks a Theorem on which he may meditate. The felt imperfections of Algebra are of three answering kinds. The Practical Algebraist complains of imperfection when he finds his Instrument in power; when a rule, which he could happily apply to many cases, can be hardly or not at all applied by him to some new case; when it fails to enable him to do or to discover something else, in some other Art, or in some other Science, to which Algebra with him was but subordinate, and for the sake of which and not for its own sake, he studied Algebra. The Philological Algebraist complains of imperfection, when his Language presents him with an Anomaly; when he finds an Exception disturb the simplicity of his Notation, or the symmetrical structure of his Syntax; when a Formula must be written with precaution, and a Symbolism is not universal. The Theoretical Algebraist complains of imperfection, when the clearness of his Contemplation is obscured; when the Reasoning of his Science seem anywhere to oppose each other, or become in any part too complex or too little valid for his belief to rest firmly upon them; or when, though trial may have taught him that a rule is useful, or that a formula gives true results, he cannot prove that rule, nor understand that formula : when he cannot rise to intuition from induction, or cannot look beyond the signs to the things signified.

It is not here asserted that every or any Algebraist belongs *exclusively* to any *one* of these three schools, so as to be *only* Practical, or *only* Philological, or *only* Theoretical. Language and Thought react, and Theory and Practice help each other. No man can be so merely practical as to use frequently the rules of Algebra, and never do admire the beauty of the language which expresses those rules, nor care to know the reasoning which deduces them. No man can be so merely philological an Algebraist but that things or thoughts will at some times intrude upon signs; and occupied as he may habitually be with the logical building up of his expressions, he will feel sometimes a desire to know what they mean, or to apply them. And no man can be so merely theoretical or so exclusively devoted to thoughts, and to the contemplation of theorems in Algebra, as not fo feel an interest in its notation and language, its symmetrical system of signs, and the logical forms of their combinations; or not to prize those practical aids, and especially those methods of research, with the discoveries and contemplations of Algebra have given to other sciences. (...)

These remarks have been premised, that the reader may more easily and distinctly perceive what the design of the following communication is, and what the Author hopes or at least desires to accomplish. That design is *Theoretical*, in the sense already explained, as distinguished from what is Practical on the one hand, and from what is Philological upon the other. [16, pp. 293-294]

ANNEXE 2

Die Arten der Knüpfung der Grösenlehre

Grad	Name		Kleine Einigung, kleine Vertauschung	Einigung, ohne Vertauschung	Einigung und zugleich Vertauschung
	Fremdwort	Deutschw			
Erster Zweiter Dritter	Addition Multiplication Potenzirung	Fügen Weben Höhen	Anfügen Anweben Anhöhen	Einfügen Einweben Einhöhen	Zufügen Verweben Erhöhen

Grassmann avait indiqué dès l'avant-propos qu'il entendait se servir dans cette oeuvre uniquement de la langue allemande, d'où la rubrique qui figure dans l'une des entrées du tableau. [36, p. 24]

ANNEXE 3

Pour le cas où on n'accepterait pas de s'en remettre à la *Grösenlehre* pour fonder l'arithmétique, Grassmann propose d'élever des règles de calcul au rang de principes ("Grundsatz") indémontrables. J'en indique ci-après quelques-unes se rapportant à l'addition et à la multiplication, exprimées dans notre terminologie actuelle.

L'addition et la multiplication sont associatives et commutatives.

0 et 1 sont neutres respectivement pour l'addition et la multiplication.

0 est absorbant pour la multiplication.

L'addition et la multiplication sont des opérations internes.

« Seules deux sortes d'unités sont introduites [zugefügt], l'unité positive (+e) et l'unité négative (-e); la somme des ces deux unités est nulle. »

Je reproduis pour l'exemple une démonstration que Grassmann propose à la page 10, où il s'agit d'établir l'égalité (-1) e = - e :

« Beweis.

$$
\begin{aligned}
(-1)\,e &= e\,(-1) \\
&= 0 + e\,(-1) && \text{(nach No 2)} \\
&= -e + e + e\,(-1) && \text{(nach No 4)} \\
&= -e + e.1 + e\,(-1) && \text{(nach No 2)} \\
&= -e + e\,(1 + -1) && \text{(nach No 2)} \\
&= -e + e.0 && \text{(nach No 4)} \\
&= -e + 0 && \text{(nach No 2)} \\
&= -e && \text{(nach No 2) »}
\end{aligned}
$$

[36, p. 10] .

ANNEXE 4

Les lois fondamentales de l'arithmétique « ne sont que les conséquences logiques rigoureuses de la réunion de quelques prémisses, peu nombreuses et simples au plus haut degré, (...) que l'on peut considérer comme « fondamentales » ou comme « hypothèses élémentaires ». Comme telles et sous certaines réserves on indiquera :

1°) l'acceptation qu'à l'intérieur du domaine de nombres considéré, une opération nommée addition soit toujours réalisable,

2°) que celle-ci conduise toujours à un résultat déterminé,

3°) qu'elle soit soumise à la loi de commutation $a + b = b + a$,

4°) qu'elle obéisse à la loi d'association $a + (b + c) = (a + b) + c$;

5°) la définition conceptuelle de la soustraction en tant qu'opération inverse de l'addition, comme elle est caractérisée dans l'égalité : $(a - b) + b = a$;

6°) l'acceptation de la réalisabilité illimitée également de cette opération inverse, à l'intérieur de tout le domaine de nombres ;

7°) l'acceptation de l'unicité de cette dernière opération » ([40] p.235).

ANNEXE 5

Wie überhaupt die Entwickelung mathematischer Begriffe und Vorstellungen historisch zwei entgegengesetzte Phasen zu durchlaufen pflegt, so auch die des Imaginären. Zunächst erschien dieser Begriff als paradox, streng genommen unzulässig, unmöglich; indess schlugen die wesentlichen Dienste, welche er der Wissenschaft leistete, im Laufe der Zeit alle Zweifel an seiner Legitimität nieder und es bildete sich die Ueberzeugung seiner inneren Wahrheit und Nothwendigkeit in solcher Entschiedenheit aus, dass die Schwierigkeiten und Widersprüche, welche man anfangs in ihm bemerkte, kaum noch gefühlt wurden. In diesem zweiten Stadium befindet sich die Frage des Imaginären heut zu Tage; - indessen bedarf es keines Beweises, dass die eigentliche Natur von Begriffen und Vorstellungen erst dann hinreichend aufgeklärt ist, wenn man unterscheiden kann, was an ihnen nothwendig ist, und was arbiträr, d. h. zu einem gewissen Zwecke in sie ihneingelegt ist. [9, pp. V-VI]

CITATIONS EN LANGUE ORIGINALE

[T1] La natura delle varie specie di numeri è più o meno ampiamente svolta in ogni trattato di aritmetica e di algebra; e questa questione fu l'oggetto di ricerche speciali di innumerevoli matematici e filosofi. Molte delle discussioni fatte si riducono a semplici logomachie. Ma negli ultimi anni, per opera di illustri scienziati, (...) la questione fu trattata con strumenti sempre più perfezionati, e posta su basi più solide; e se al giorno d'oggi sussiste ancora qualche contraddizione fra le opinioni di questi autori, e qualche incertezza, già però si può intravederne la soluzione completa. [8, p. 87]

[T2] Ein, wenn Sie es so nennen wollen, philosophisches Bedürfnis, welches mich in allen Zweigen der Mathematik dahin treibt, die Fundamente gründlich und in ihren Zusammenhange aufzufassen, veranlasste mich diesen Sommer, zur Aufklärung des Wesens der imaginären und komplexen Zahlen die schönen « Lectures on Quaternions » von Hamilton zu studieren. [12, p. 270]

[T3] Will man die häufig gestellte Frage beantworten, ob eine gewisse Zahl möglich oder unmöglich sei, so muss man sich zunächst über den eigentlichen sinn dieser Frage klar werden. Ein Ding, eine Substanz, die selbstständig ausserhalb des denkenden Subjectes und der sie veranlassenden Objecte existirte, ein selbstständiges Princip, wie etwa bei den Pythagorformen, ist die Zahl heute nicht mehr. Die Frage von der Existenz kann daher nur auf das denkende Subject oder die gedachten Objecte, deren Beziehungen die Zahlen darstellen, bezogen werden. Als unmöglich gilt dem Mathematiker streng genommen nur das, was logisch unmöglich ist, d.h. sich selbst widerspricht. Dass in diesem Sinne unmögliche Zahlen nicht zugelassen werden können, bedarf keines Beweises. Sind aber die betreffenden Zahlen logisch möglich, ihr Begriff klar und bestimmt definirt und also ohne Widerspruch, so kann jene Frage nur darauf hinaus kommen, ob es im Gebiete des Realen oder des in der Anschauung Wirklichen, (...), ob es Objecte gebe, an welchen die Zahlen, also die intellectuellen Beziehungen der bestimmten Art zur Erscheinung kommen. In diesem Sinn erkonnte man (...) die aus $\sqrt{-1}$ zusammengesetzten Zahlen solange unmögliche nennen, als man keinerlei anschauliche Klarstellung derselben kannte, und gibt es noch heute Zahlen dieser Art. Nachdem aber die Zahen $a+b\sqrt{-1}$ eine geometrische Darstellung gefunden haben, und ihre Operationen geometrisch gedeutet worden sind, kann man in keiner Weise dieselben als unmögliche bezeichnen; sie sind ganz von derselben Realität als die positiven und negativen Zahlen, wenn auch letztere zahlreichere Substrate in der Anschauung finden, und in vielen Fällen im Wirklichen dargestellt oder möglich gemacht werden können, wo die in der Zahl $a+b\sqrt{-1}$ ausgesprochene Beziehung nicht realizirt werden kann. [11, p. 6]

[T4] Um überzeugt sein zu können, dass bei keiner irgend welchen Zusammensetzung der Verknüpfungen ein solcher Widerspruch auftreten kann, werden wir die Regeln selbst so unabhängig von einander halten müssen, dass keine in die andere übergreift : wir werden uns auf die absolut zureichenden beschränken müssen. [11, p. 10]

[T5] Wie ich dort gezeigt habe, kann der Begriff der Zahl rein formal und ohne Rücksicht auf den der Grösse gefasst werden ; letzterer tritt nur hinzu als anschauliches Substrat jener Formen. [11, p. VIII]

[T6] Die rein formalen Wissenschaften, Logik und Mathematik, haben solche Relationen zu behandeln, welche unabhängig von dem bestimmten Inhalte, der Substanz der Objecte sind oder es wenigstens sein können. [11, p. 1]

[T7] In den Naturwissenschaften zeigt sich in neuester Zeit das entschiedene Streben, aus der Welt des empirischen Details zu den grossen Principien aufzusteigen, welche alles Einzelne beherrschen und unter höheren Gesichtspunkten zu einem Ganzen vereinigen : das Streben nach einer, nicht von aussen octroyirten, sondern aus der Sache selbst fliessenden Philosophie der Natur. Auch auf dem Gebiete der Mathematik scheint sich ein verwandtes Bedürfniss, das in England stets rege gewesen ist, in unseren Tagen immer allgemeiner geltend zu machen. Der Wunsch, dies Bedürfniss zu erwecken und wenigstens in einem gewissen Umkreise zu befriedigen, hat auf mich bei Abfassung des vorliegenden Werkes einen wesentlichen Einfluss ausgeübt. [11, p. IX]

[T8] Im III. und IV. Abschnitte ist die Natur der ganzen, gebrochenen, rationalen und irrationalen reellen Zahlen und Grössen, zum ersten Male, wie mir scheint von einem höheren und allgemeineren Gesichtspunkte strenge und systematisch dargestellt. [11, p. VII]

[T9] (...) überall die Aufgabe, deductiv aus gegebenen Relationen neue Beziehungen abzuleiten, die allerdings in den vorausgesetzten enthalten und mit ihnen gleichzeitig gesetzt sind, deren Erkenntniss aber infolge der Natur des menschlichen Geistes einen wissenschaftlichen Fortschritt begründet. [11, p. 1]

[T10] Diese werden wir zum Leitfaden nehmen und Operationen formal so bestimmen, dass die Resultate in die der gewöhnlichen Arithmetik übergehen, wenn an Stelle der mentalen Objecte, an denen operirt wird, solche in der Anschauung existirende Objecte getreten sind, deren gegenseitige Relationen durch gemeine Zahlen ausgedrückt werden. [11, p. 11]

[T11] Der hierin enthaltene hodegetische Grundsatz kann als das Princip der Permanenz der formalen Gesetze bezeichnet werden und besteht darin : Wenn zwei in allgemeinen Zeichen der arithmetica universalis ausgedrückte Formen einander gleich sind, so sollen sie einander auch gleich bleiben, wenn die Zeichen aufhören, einfache Grössen zu bezeichnen, und daher auch die Operationen einen irgend welchen anderen Inhalt bekommen. [11, p. 11]

[T12] Wird eines dieser Postulate, welche als arbiträre Annahmen erscheinen und eben als solche das gewöhnliche complexe Zahlensystem von allen anderen charakteristisch unterscheiden, fallen gelassen, so kann die Gleichung $xx = -1$ mehr Wurzeln als jene $\pm i$, wie sie denn in der That in der Theorie des Quaternionen (...). [11, p. 70]

[T13] Die Raumlehre, da sie etwas in der Natur gegebenes, nämlich den Raum, zurückgeht, ist kein Zweig der reinen Mathematik, sondern eine Anwendung derselben auf die Natur. [29, p. 297]

[T14] Hierauf erwiedere ich, dass es in der Tat mich innigst gefreut hat, in Ihnen einen Geistesverwandten kennen zu lernen, dass aber diese Geisterverwandtschaft nur hinsichtlich der Mathematik, nicht auch in Beziehung auf Philosophie stattfindet; denn wie ich Ihnen bereits mündlich erklärt zu haben mich erinnere, bin ich auf dem Felde der philosophischen Spekulation von jeher eim Fremdling gewesen. [30, p. 100]

[T15] Es ist bekannt genug, dass die halbphilosophische Fassung der Ausdehnungslehre von 1844 die Ursache gewesen ist, dass dieses merkwürdige Werk so lange Zeit nicht zu der ihm gebührenden Annerkennung hat kommen können. Grassmann ausgesprochene Absicht war, alle seine Begriffe womöglich gleich in der allgemeinsten Form darzustellen, deren sie fähig sind. [12, Erster Theil, p. 404]

[T16] (...) soll uns die Gesetze lehren des streng wissenschaftlichen Denkens. Sie darf nicht andere Gesetze des Denkens bereits voraussetzen; denn sonst würde jeder Fehler jener Gesetze auch die Formenlehre fehlerhaft und unwissenschaftlich machen; sie darf also auch namentlich nicht die Gesetze der Sprache voraussetzen, nicht in die Gesetzen und Formen der Sprache sich bewegen. Nur die Fähigkeit des Menschen zum Denken (...) setzt sie voraus. ([36], p. 5)

[T17] Die Einhaltung dieses Verfahrens ist in der That nicht nur lehrreich, sondern für die richtige Auffassung der zwischen Grund und Folge bestehenden Beziehungen - für das Erkennen ihres gegenseitigen Zusammenhanges - geradezu unerlässlich. Und wie hauptsächlich dieser Tendenz z.B. die ganze neuere sogenannte absolute oder « Pan-Geometrie » ihre Entstehung verdanken möchte, so liegt dieselbe auch der eigentlichen formalen oder absoluten Algebra zu Grunde. [40, p. 232]

[T18] Daraus also, dass diese Bedingungen 1°) bis 7°) den Gesetzen wirklicher Operationen zu Grunde liegen, wird nun jedenfalls hervorgehen, dass dieselben unter sich verträglich sind; es wird demnach keine derselben in einen Widerspruch zu den übrigen stehen können. [40, p. 237]

[T19] Ferner ist leicht zu sehen, dass diese Voraussetzungen auch im ganzen von einander unabhängig sind, d.h. es wird nicht möglich sein, die einen aus den andern vollständig oder auch nur theilweise abzuleiten. [40, pp. 236-237]

[T20] Abgesehen hievon wird die gegenseitige Unabhängigkeit der Prämissen 1°) bis 7°) sich später noch darin zur genüge documentiren, dass bei gewissen (höheren) Operationen (oder Zahlen) die einen oder andern von diesen Voraussetzungen defect werden oder in Wegfall gerahten, ohne dass dadurch die übrigen gestört werden. [40, p. 237]

[T21] (...) ist übrigens diese Voraussetzung in einer noch allgemeineren enthalten, die überhaupt ein Axiom jeder deduktiven Wissenschaft bildet (...). Das gedachte Princip könnte wohl das Axiom von der Inhärenz der Zeichen genannt werden. Es gibt uns die Gewissheit, dass bei allen unsern Entwickelungen und Schlussfolgerungen die Zeichen in unsrer Erinnerung - noch fester aber am Papiere - haften. Die Anzahl der Einer, die wir schreiben, ändert sich zum Beispiel nicht, während wir sie umstellen und versetzen (...). Es bleiben überhaupt die Buchstaben sich gleich, während wir mit ihnen operiren; ein a geht nie in ein b über (...). Ohne diesen Grundsatz, den wir aus einer sehr reichhaltigen Erfahrung durch inductorische Ausdehnung oder Verallgemeinerung gewinnen, würde in der That jede Deduction illusorisch sein (...). [40, p. 16]

[T22] Diejenigen Lehren der Analysis, welche gewöhnlich als der elementare Theil derselben betrachtet werden, sind in der letzten Zeit neu bearbeit und wesentlich gefördet worden. So bedeutend weichen gegenwärtig die populär-pädagogischen und die wissenschaftlichen Darstellungen der Elemente der Mathematik von einander ab, dass beinahe jedes Lehrbuch und jedes Colleg über höhere Analysis mit einem Abrisse der Elemente eingeleitet wird. [43, Avant-propos, p. III]

[T23] 1. Absolute Grössen. Wir werden zunächst erörtern, welche Eigenschaften allen Systemen von geometrischen Grössen d.i Linien, Winkeln, Flächen, Körpern abgesehen von der Ausdehnung zukommen. (...). Ferner handelt es sich um Ermittelung der notwendigen und hinreichenden Eigenschaften d.i. derjenigen, aus welchen die übrigen von selbst hervorgehen. Die Grössen irgend eines dieser Systeme, im Folgenden mit A, B, C, ... bezeichnet, erfüllen die nachstehenden Forderungen.

I.) Je zwei derselben können entweder als gleich oder ungleich und im letzteren Falle kann die eine als die grössere, die andere als die kleinere bezeichnet werden.

II.) Die Grössen lassen sich addiren (und vervielfachen) wie die natürlichen Zahlen, insbesondere ist die Summe je zweier eine Grösse des Systemes.

III.) Falls $A > B$, so existirt im Systeme eine und nur eine Grösse X so dass $B + X = A$.

IV.) Jede Gröse A ist entweder beschränkt oder unbeschränkt in gleiche und mit ihr gleichartige Theile zerlegbar d.h. es giebt im Systeme eine Grösse X, so dass $nX = A$, worin n entweder jede oder auch nur gewisse natürliche Zahlen bedeuten kann.

V.) Ist $A > B$, so giebt es ein Vielfaches von B, das grösser ist als A : $pB > A$. ([43], p.69)

[T24] Die Merkmale, die Sie in ihren Axiomen angeben, sind wohl sämtlich höherer als erster Stufe; d.h. sie antworten nicht auf die Frage, « Welche Eigenschaften muss ein Gegenstand haben, um ein Punkt (eine Gerade, Ebene usw.) zu sein? » (...).

Am schroffsten stehen sich wohl unsere Ansichten gegenüber hinsichtlich Ihres Kriteriums der Existenz und der Wahrheit. [46, p. 74]