LA MESURE DE LA COURBURE ET LA PRATIQUE DU CALCUL DIFFERENTIEL DU SECOND ORDRE

Patricia RADELET-DE GRAVE (Université de Louvain)

PRÉAMBULE : Plus que la réponse à des questions que je me pose depuis une dizaine d'années, cet exposé fournira de nouvelles questions sur le sujet, au mieux plus précises. Il fournira aussi quelques précisions historiques concernant la découverte de la formule du rayon de courbure, il faudrait peut-être dire concernant les découvertes des formules du rayon de courbure.

Il convient avant tout de présenter l'objet des questions et de montrer en quoi son étude rejoint le sujet de notre rencontre : la pensée arithmétique.

1° L'objet des questions

L'objet des questions sont les quatre premières pages du premier grand texte de Jacob Bernoulli sur *l'Elastica*. Il fut publié dans les *Acta Eruditorum* de 1694. On y trouve quatre formules du rayon de courbure, suivant le choix de la variable indépendante : ds constant, dx constant ou dy constant. Il n'y est pas question de physique, le raisonnement est purement mathématique, dans la suite par contre, l'expression du rayon de courbure est utilisée pour résoudre le problème de l'*elastica.* (Cf. Reproduction du titre, de la figure I et des résultats.)

JAC. B. CURVATURA LAMINÆ ELAsticæ. Ejus Identitas cum Curvatura Lintei a pondere inclusi fluidi expansi. Radii Circulorum Osculantium in terminis simplicissimis exhibiti, unacum novis quibusdam Theorematis huc pertinentibus, &c.

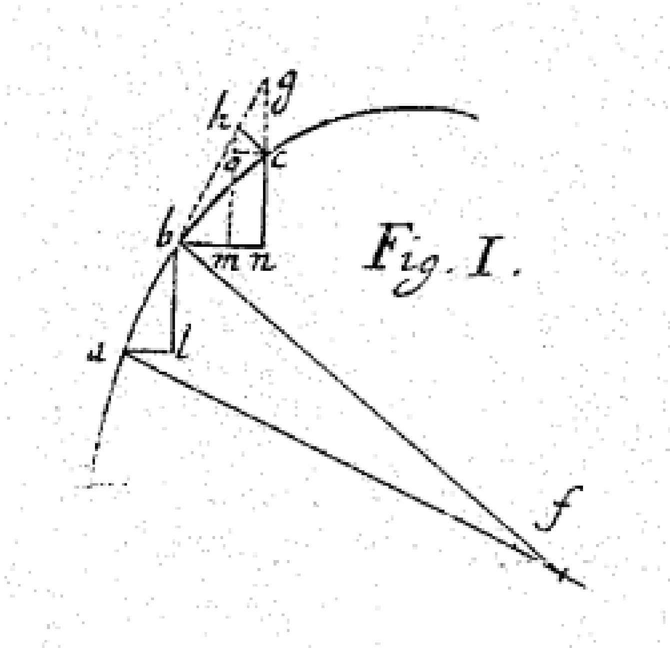
Post triennale silentium promissi tandem fidem libero, sed ita, ut moram, quam Lector alias inique ferre posset, nonnullo fœnore com-

Priusquam itaque ad institutum pergo, sunto in fig. I, portiunculæ Curvæ cujuspiam infinite parvæ ab,bc, quibus perpendiculariter insistant radii circuli osculatoris af, bf, concurrentes in puncto Evolutæ f, facientesque angulum a fb æqualem angulo gbc, quem producta portio ab cum altera bc efficit; tum abscindatur bh = bc, ductæque intelligantur parallelæ al, bn, co, nec non bl, hom, gcn; quarum illæ abscissarum, hæ applicatarum elementa (sive dx, dy, ddx, &c.) indigitent. Dico,

α. Quod positis Curvæ elementis ab, bc, hoc est, ipsis ds æqualibus, radius circuli osculatoris seu longitudo fili evolventis af, nempe $z = \frac{dx\,ds}{ddy}$, item $z = \frac{dy\,ds}{ddx}$: Nam ho. bc :: ho. hc + hc.bc :: (ob similitud. Δrum bmh, hoc, item hcb, abf) bm.bh + ab.bf :: al.ab + ab bf :: al.bf :: $dx.z$. Sed ho = hm — nc = bl — nc = ddy, & bc = ds; quare $ddy.ds :: dx.z$. Eodem modo ostendetur $ddx.ds :: dy.z$. Q. E. D. *Coroll.* In omni Curva, positis ejus elementis æqualibus, differentiæ secundæ coordinatarum primis reciproce proportionantur: cum enim $\frac{dxds}{ddy} = z = \frac{dyds}{ddx}$, erit $dxddx = dyddy$, adeoque $ddx.ddy :: dy.dx$; quod ipsum quoque ex sola similitudine Δrum bmh, hoc, liquet; ubi co seu ddx est ad oh seu ddy, ut hm ad bm, vel bl, ad al, seu dy ad dx.

β. Positis vero abscissæ elementis al, bn, hoc est, ipsis dx æqualibus, erit radius osculantis circuli af seu $z = \frac{ds^3}{dxddy}$. Quoniam gc. bc :: gc. hc + hc. bc :: (ob simili. Δrum bng, chg, nec non hcb, abf) bg. bn + ab. bf :: ab. al + ab. bf :: $ds.dx + ds.z$ :: $dsq.zdx$: atque gc = gn — nc = bl — nc = ddy, & bc = ds; erit $ddy.ds :: dsq.zdx$. Q.E.D. Haud absimiliter ostendetur, quod positis dy æqualibus, futurum est $z = \frac{ds^3}{dyddx}$.

His addo nova, de quibus nec *Fratri* adhuc constat, Theoremata



2° Comment cette étude est-elle reliée à notre thème ?

Considérons une droite et un cercle (la règle et le compas), la première n'est pas courbe, l'autre l'est de manière uniforme, elle a partout la même courbure. Mais dans d'autres courbes, comment mesurer cette courbure, c'est-à-dire associer un nombre plus ou moins grand suivant la grandeur de la courbure ? Quelle est la grandeur qui sera représentative de cette courbure ?

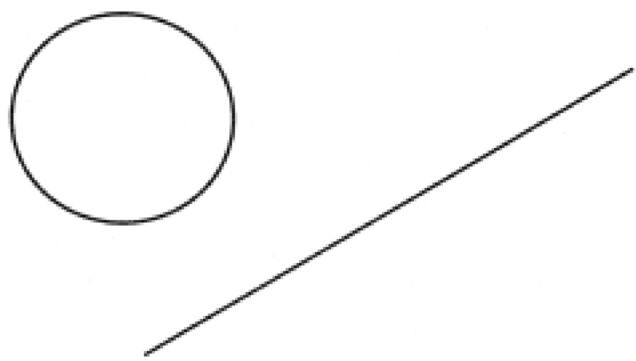


Fig. 1, la droite sans courbure et le cercle de courbure constante

Première idée :

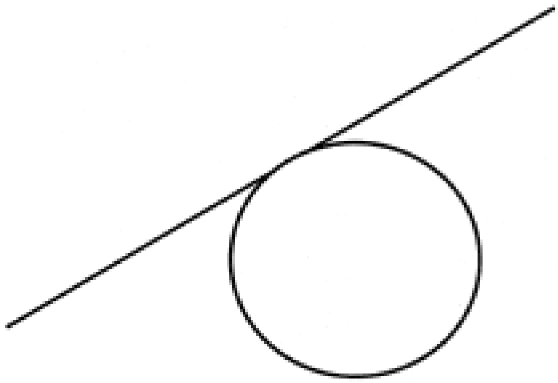


Fig. 2, mesure de la courbure du cercle par son écartement de la droite

Comparer la courbe à la droite en considérant la tangente au point où l'on veut spécifier la courbure. On trace ainsi un angle bizarre mais qui semble dire quelque chose sur la manière dont, en ce point, la courbe s'écarte de la droite. Mais comment lui assigner une grandeur, le mesurer, lui associer un nombre qui le caractérise. Depuis l'affirmation d'Euclide livre III, prop. 16 selon laquelle il est impossible de glisser une autre droite entre la tangente et le cercle, cet angle de contingence ou angle corniculaire (Viète) a fait couler beaucoup d'encre.

En 1685, Wallis précise la difficulté.

> Je dis que cette déflexion (qui éloigne la courbe de sa tangente, et que l'on appelle communément angle de contact) n'est pas un angle ou une déclinaison, (pas plus que dans un mouvement une accélération n'est une vitesse). Mais c'est le commencement d'une déclinaison, qui montre le degré de courbure. C'est-à-dire dans quelle raison ou proportion on s'éloigne du rectiligne, ou de la direction que l'on avait au point de contact[1].

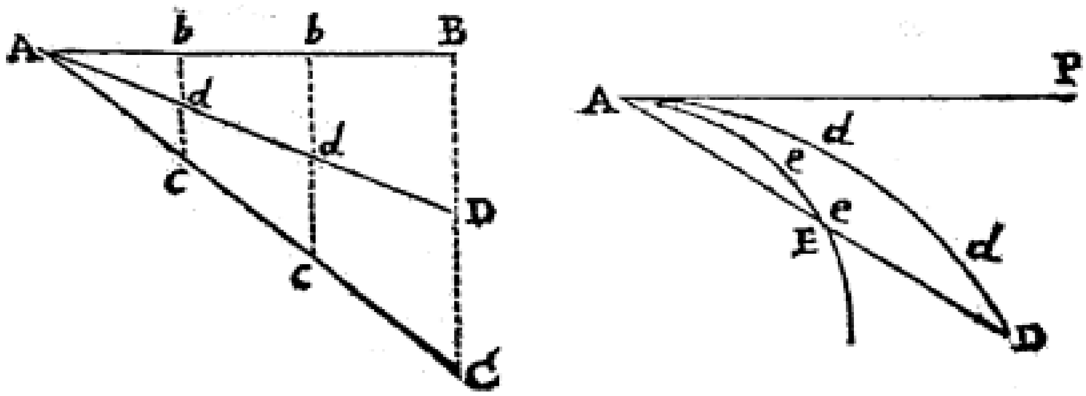


Fig. 3, Illustration du texte de Wallis[2]

[1] J. Wallis, Operum mathematicorum pars altera, qua continentur : de Angulo contactus et semicirculi disquisitio geometrica, …, Oxonii 1654, p. 655. (Cf. aussi note de Th. Heath à la proposition 16 du livre III d'Euclide in The Thirteen Books of Euclid's Elements, transl. from the text of Heiberg ; with introd. and comment. by Sir Thomas L. Heath, 2nd ed., rev. with additions, New York : Dover publications, 1956).

[2] J. Wallis, Operum mathematicorum pars altera, qua continentur : de Angulo contactus et semicirculi disquisitio geometrica, …, Oxonii, 1654, p. 655.

Deuxième idée

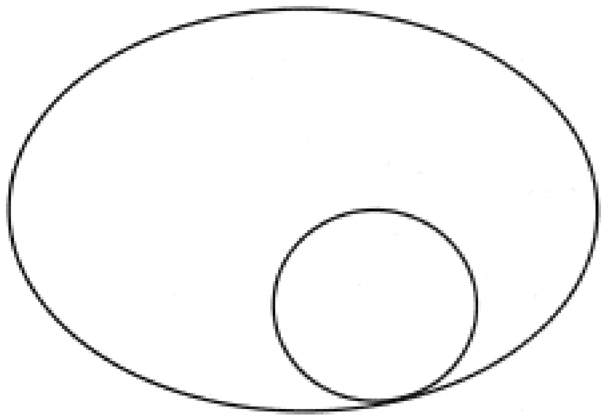


Fig. 4, comparaison de la courbure d'une courbe à celle du cercle

On peut aussi songer à comparer la courbure de la courbe à celle d'un cercle en traçant un cercle tangent à la courbe au point considéré et l'on dira qu'au point considéré, la courbure est la même que celle du cercle. Mais quel cercle prendre ? Il est possible de tracer de nombreux cercles tangents en un point d'une courbe. Il faut de plus dire comment mesurer la courbure du cercle ? La dernière question est simple. Comme le cercle est un objet à un paramètre, cette courbure ne peut être liée qu'à ce seul paramètre, le rayon. Mais si on lie la courbure directement au rayon, la droite a une courbure infinie. Il faut donc remarquer que plus la circonférence est petite plus vite on parcourt les 360 degrés et donc plus grande est la courbure. Bref la courbure est l'inverse du rayon du cercle, et ainsi la courbure de la droite est bien nulle. C'est ainsi que procéderont Newton et Wallis.

Newton[3], Problème second :

> Trouver la grandeur de la courbure des lignes
>
> Lemme : La courbure de parties égales de cercle sont réciproquement comme leurs diamètres. Car la courbure d'un cercle entier (acdea, bfghmb) correspond à 4 angles droits. Pour cette raison, il n'y a pas plus de courbure dans tout le cercle acdea que dans l'autre bfghmb. Supposons que le périmètre acde = bfgh. Alors on a ar est à br comme bfgh qui est égale à acde est à bfghmb ou comme la courbure de bfgh est à la courbure de bfghmb qui est égale la courbure de acdea.

3 I. Newton, *Le traité d'octobre 1666 sur les fluxions in Mathematical Papers of Sir Isaac Newton*, Ed. D.T. Whiteside, vol. 1, Cambridge, University Press, 1967, p. 419.

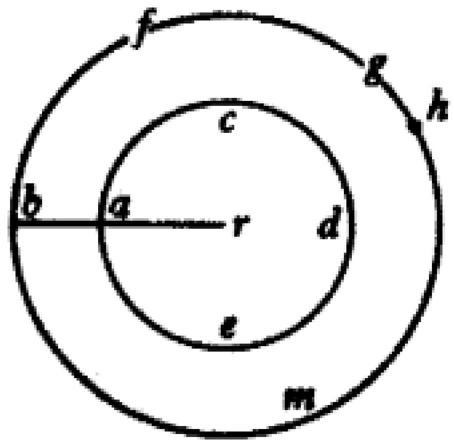


Fig. 5, Illustration du texte de Newton

Wallis,[4]

> De même, des arcs de cercles AD, AE déviants de la tangente AP (d'angle ou de déclinaison commençant) sont uniformes, parce qu'en chacune de ses parties elle a le même degré de courbure ; dès lors les déclivités aux points ddD (émergeant de rien) sont proportionnelles aux longueurs Ad Ad AD ; comme les déclivités aux points eeE (émergeant également de rien) sont proportionnelles aux longueurs Ae Ae AE. Mais comparés entre eux ces degrés de courbure (curvitude) sont différents(et peuvent varier dans n'importe quelle proportion : En effet le plus petit arc de cercle (parce qu'il a autant de courbure en une longueur moindre, et donc une intensité de courbure plus grande) donc d'autant plus courbe que le diamètre du cercle est plus petit, ou la courde qui soustend des arcs égaux. (Donc les degrés de courbure sont inversement proportionnels aux longueurs des diamètres et des cordes soutendant un même arc, et soustendant elles même le même arc.

Reste la première question : comment choisir le cercle le plus représentatif ? C'est celui qui épouse le mieux la forme de la courbe c'est-à-dire le plus grand avant celui qui coupe le cercle. Qu'est-ce que cela veut dire ? Prenons les choses autrement. Au lieu de rechercher le plus grand, cherchons le plus petit de ceux qui coupent le cercle. Je sais que le centre doit se trouver sur la perpendiculaire à la tangente au point considéré. Je trace plusieurs cercles. J'en choisis un qui coupe un peu la courbe puis je déplace son centre sur la perpendiculaire à la tangente jusqu'à ce qu'il devienne tangent. On constate que les deux points d'intersection du cercle avec la courbe se rapprochent jusqu'à coïncider pour le cercle que nous cherchons. Enoncée de cette manière, l'idée peut remonter à l'antiquité. Si l'on dit que l'on a une racine double ou multiple du système d'équation des deux cercles, on est proche de Descartes. Mais ce procédé ne donne pas un unique cercle. Ce cercle n'est pas unique, pour cela, il faut prendre deux cercles tangents en des points infiniment proches et de rayons infiniment proches. C'est-à-dire l'intersection entre deux perpendiculaires infiniment proches à la courbe. On rapproche deux points de contacts comme le dira Leibniz.

G. Cramer donne un résumé de la première partie de ce qui vient d'être dit dans le chapitre qu'il consacre à la courbure des lignes courbes en leurs différents points. La détermination des Tangentes d'une courbe indique quelle est sa direction en chacun de ses points. Mais, pour en connaître parfaitement la nature, il faut savoir de plus combien la courbe s'écarte de cette direction ; il faut savoir mesurer sa courbure. Car une même courbe

[4] J. Wallis, Operum mathematicorum pars altera, qua continentur : de Angulo contactus et semicirculi disquisitio geometrica, …, Oxonii 1654, p. 656.

n'est pas également courbe partout ; elle ne s'écarte par toujours également de sa Tangente ; elle ne fait pas avec cette droite des angles de contact égaux en tous ses points. C'est le cercle seul qui a par tout la même courbure, & qui est par là très propre à mesurer la courbure des autres courbes. D'autant mieux que, quoiqu'un même cercle soit également courbe en tous ses points, les différents cercles ont des courbures différentes, & réciproquement proportionnelles à leurs rayons, ou à leur diamètres. Si on courbe circulairement deux droites égales, mais qu'on fasse de l'une une circonférence entière et de l'autre une demi circonférence ; celle-ci sera deux fois moins courbe que celle-là, mais aussi le cercle dont elle fait la demi-circonférence à un rayon double du cercle dont l'autre ligne fait toute la circonférence[5].

L'idée de deux points voisins qui se rapprochent jusqu'à s'identifier conduit immédiatement aux infiniment petits mais comment cette simple observation va-t-elle être domestiquée jusqu'à être exploitée par le calcul différentiel, là se situe l'une de nos questions.

Et comme le dit très bien Newton au début du *de methodis serierum et fluxionum*[6],

> Since operations of computing in numbers and with variables are closely similar-indeed there appears to be no difference between them excepts in the characters by which quantities are denoted, definitely in the one case, indefinitely so in the latter.

Cette réflexion fait bien partie de la pensée arithmétique.

QUESTIONS

Les questions que l'on peut se poser à propos des quatre pages qui contiennent le *theorema aureum* de Jacob Bernoulli ne sont pas toutes directes. Plusieurs d'entre elles proviennent de la lecture et de la confrontation entre les *Meditationes,* le journal scientifique et chronologique de Jacob Bernoulli et ses publications.

1° Pourquoi le calcul différentiel fait-il son apparition dans les *Meditationes* en même temps que ce théorème ? Il résulte de notre description de la compréhension du rayon de courbure que cette formule exige le calcul différentiel. Il faut encore montrer en quoi cette formule est nécessaire au calcul différentiel.

2° Pourquoi les coordonnées curvilignes font-elles leur apparition simultanément ? Newton suit le même chemin ?

3° Pourquoi l'élément de ligne fait-il également son apparition dans les travaux de Jacob quelques Meditations plus tôt ?

4° Pourquoi Jacob Bernoulli attribue-t-il tant de valeur à son « *theorema aureum* » alors que de l'Hôpital écrira à Johann , le 31 Décembre 1694 :

> Pour ces théorèmes dorez dont il fait tant de cas et desquels il dit …de quibus nec fratri adhuc constat, il me semble qu'il se fait tort en estimant trop de choses si faciles [7].

---

[5] G. Cramer, Introduction à l'analyse des lignes courbes algébriques, Genève, Frères Cramer et Philibert, 1750, Chap. XII, De la courbure des lignes courbes, p. 539.

[6] I. Newton, *Methodus de serierum et fluxionum, in The Mathematical papers,* Ed. D.T. Whiteside, vol. III, Cambridge, University Press, 1969, p. 33.

Et ce dernier répondra le 12 janvier 1695 :

> C'est avec raison que vous vous raillez de ses théorèmes dorez dont il fait tant de cas et desquels il dit de quibus nec fratri adhuc constat, ce qui étoit aussy tout à fait hors de son sujet, apparemment pour faire parade de sa science et diminuer la mienne ; … Je me souviens maintenant que vous m'envoyâtes il y a longtems une methode pour déterminer les poins des caustiques où vous vous serviez de ces mêmes theorèmes, je suis faché de n'y avoir plus pensé avant que j'envoyasse ma construction de la courbe de descente à Leipsic ; je vous propeste que j'y en aurois fait mention exprès, pour apprendre à mon frère de parler un peu plus modestement de ses inventions qui sont déjà connues à d'autres[8].

Jacob donne pour la première fois le nom de theorema aureum à son expression différentielle du rayon de courbure dans sa Démonstration du théorème opposé (cf. sa lettre du 15 mars 1692) par son Frère disant que la caustique de la cycloïde vulgaire née de la réflexion de rayons parallèles à l'axe de celle-ci est une cycloïde vulgaire, dont la base est la moitié de celle de la première.[9]

5° Pourquoi Jacob attend-il près de trois ans avant de publier un théorème tellement important à ses yeux alors qu'il publie des textes où il en fait usage mais le cache. La formule du rayon de courbure apparaît dans la Med CLXI. *De spiralis parabolicae (Parabolae helicoidis) dimensione*[10] alors que Jacob publie son *theorema aureum* dans Op. LVIII de Juin 1694. Alors que dans les travaux antérieurs à l'Op . LVIII mais postérieurs à la Méditation CLXI, c'est-à-dire dans les travaux Op. XLI, XLVII, XLIX,. L,. et. LVI, il cache son théorème.

6° Comment se fait-il que L'Hôpital utilise ce théorème dans sa correspondance avec Johann et le publie avant qu'il n'ait été publié par Jacob lui-même ?

EBAUCHES DE REPONSES

Les influences subies par Jacob

En fait Johann et de l'Hopital auraient pu être encore plus féroces avec Jacob puisque des expressions ont été données au rayon de courbure par Descartes[11] et Huygens[12]. Ils sous-entendent donc tous trois, une expression différentielle du rayon de courbure. Même là, Jacob n'est pas vraiment le premier puisque Newton[13] le calcule au moyen des fluxions dans son *de methodis serierum et fluxionum*, mais ce texte n'est pas publié à l'époque.

Analysons les premiers travaux de Jacob dans ce domaine en les situant par rapport aux travaux antérieurs pour tenter de saisir l'originalité qu'il y trouve. Ses deux premières

---

7 Lettre de l'Hôpital à Johann Bernoulli du 31 Décembre 1694 *Der Briefwechsel von Johann Bernoulli*, Bd. 1, Birkhäuser, Bâle 1955, p. 251-252.

8 Lettre de Johann Bernoulli à de l'Hôpital du 12 janvier 1695, *Der Briefwechsel von Johann Bernoulli*, Bd. 1, Birkhäuser, Bâle 1955, p. 255-256.

9 Jacob Bernoulli, Med. CXCII, Demonstratio Theorematis a Fratre animadversi (vid. Lit. ejus de 15 Martii 1692) Caustica Cycloidis vulgaris nata ex reflexis radiis parallelorum axi itidem est vulgaris cyclois, cuius basis est prioris dimidia T.P. 1/1692 - T.A. 6/1692, Manuscrit de l'Universitäts Bibliothek Basel, LI a 3.

10 Jacob Bernoulli, Med CLXI. *De spiralis parabolicae (Parabolae helicoidis) dimensione*, T.P. 1689-T.A. 1/1691, Manuscrit de l'Universitäts Bibliothek Basel, LI a 3.

11 R. Descartes, *Géométrie,* Adam & Tannery, Vrin, Paris, réédition 1996, tome 6, p. 417-419.

12 Ch. Huygens, *Horologium oscillatorium*, prop XI du livre III, Œuvres complètes de Christiaan Huygens publiées par la société hollandaise des sciences, tome XVIII, La Haye, Martinus Nijhoff, 1934, p. 324-327.

13 I. Newton, *Methodus de serierum et fluxionum*, in The mathematical papers, Vol. III, p. 151 et svt.

ébauches, écrites entre 1686 et 88, Med. CXII[14] et CXIX,[15] analysent l'intersection d'un cercle et soit d'une parabole, soit d'une hyperbole, avec la tangence comme cas particulier. Elles font partie d'un nombre plus grand d'articles des *Meditationes* écrits à l'occasion de la lecture de la Géométrie de Descartes et aboutiront à deux publications contenant ses réactions : Op. XXXXI, *Animadversio in Geometriam Cartesianam, et Constructio quorundam Problematum Hypersolidorum*[16] et Op. LXVII, *Notae et Animadversiones tumultuariae*[17]. *Cette dernière* comprend 5 parties. La première concerne la première partie de la Géométrie de Descartes, le deuxième le commentaire de van Schooten, la troisième *l'additamentum* de van Schooten, la quatrième, la première lettre de Hudde et la cinquième la deuxième partie de la géométrie. A l'influence de Descartes et de Hudde, il faut encore ajouter celle de Fermat. En effet, l'article sur l'hyperbole compare trois méthodes, celle de Descartes, de Hudde et de Fermat à celle de Jacob lui-même. Une dernière influence est celle de Leibniz qui vient de publier sa *Meditatio nova de natura anguli contactus et osculi, horumque usu in practica mathesi ad figuras faciliores succedaneas difficilioribus substituendas*[18]. Derrière ce texte se cache également l'influence de la proposition XI du livre III de l'*Horologium oscillatorium* de Huygens. Mais l'influence de Huygens sur Jacob est beaucoup plus directe puisque en avril 1684, il publie une lettre *sur le démêlé de Mr l'Abbé Catelan, avec Mr. Hugens, touchant le Centre d'Oscillation*[19] et qu'il avait donc déjà lu *l'Horologium* à ce moment.

Nous devons, à présent, mieux cerner ces différentes influences.

Descartes

Descartes[20] a fourni dans *la géométrie*, les équations des courbes et la possibilité de déterminer avec leur aide les intersections et les contingences ou tangences, points doubles où une racine est double suivant le langage géométrique ou algébrique. La règle donnée par Hudde simplifie les choses. Pour nous raccorder au schéma de réflexion donné en introduction, Descartes et Hudde fournissent une manière algébrique de déterminer la tangence ou le contact de la droite et de la courbe mais aussi de la courbe et du cercle osculateur[21].

N'oublions pas qu'une méthode donnant la tangente est reliée d'une manière ou d'une autre au processus de dérivation même avant la lettre.

Fermat

Fermat a pour objectif de déterminer les *maxima* et *minima* donc les points où la dérivée s'annule. Il le fait au moyen de grandeurs infiniment petites.

---

[14] Jacob Bernoulli, Med CXII, In parabola ABC, ducta perpendiculari BI, in eadem infinite producta reperire punctum D, e quo descriptus circulus EBG Parabolam secet in B, TP 4/6/1686-TA 6/1688, Manuscrit de l'Universitäts Bibliothek Basel, LI a 3.

[15] Jacob Bernoulli, Med. CXIX, In hyperbola ABC, cujus Asymptotae DE, DF ducere perpendicularem GH per datum in illa punctum C, inque hac perpendiculari reperire punctum H, super quo descriptus circulus radio HC, secet Hyperbolam, TP. 4/6/1686 - TA. 6/1688, Manuscrit de l'Universitäts Bibliothek Basel, LI a 3.

[16] Jacob Bernoulli, *Acta Eruditorum*, Junii 1688, p. 323-330 ; *Opera omnia*, Genève 1744, p. 343-351 *et Die Werke von Jakob Bernoulli*, Birkhäuser, Bâle 1989, vol. 2, p. 471-479.

[17] Jacob Bernoulli, Francofurti ad Moenum, vol. II, 1695, p. 421-468,*Opera omnia*, p. 665-717, *Die Werke von Jakob Bernoulli*, Birkhäuser, Bâle 1989, vol. 2, p. 547-602.

[18] G. W. Leibniz, *Acta Eruditorum*, Junii 1686, in Gerhardt, *Mathematische Schriften*, tome VII, p. 326-329 et M. Parmentier, La naissance du calcul différentiel, Paris, Vrin, 1989, pp. 122-125.

[19] Jacob Bernoulli, *Journal des Savans*, 1684, p. 142 ; *Opera omnia*, p. 195-196.

[20] Descartes, *Géométrie*, A&T, tome 6, p. 413 & suivantes.

[21] Descartes, *Géométrie*, A&T, tome 6, p. 417-419.

Huygens

L'influence de Huygens est d'un autre ordre. En étudiant le mouvement d'un pendule, il a observé que le fil du pendule qu'il enroulait sur une cycloïde pour obtenir l'isochronisme était, par construction, toujours orthogonal à la courbe décrite par le poids du pendule. Or, le fil enroulé sur une courbe et ensuite « développé » était utilisé pour mesurer au sens propre la longueur de la courbe. Il a ainsi été conduit à étudier les propriétés de ces deux courbes, celle que l'on développe et celle à laquelle le fil développant est toujours perpendiculaire. Jacob la nomme évolute, de nos jours, la développante . Le fil qui établit le lien entre les deux courbes est le rayon de courbure.

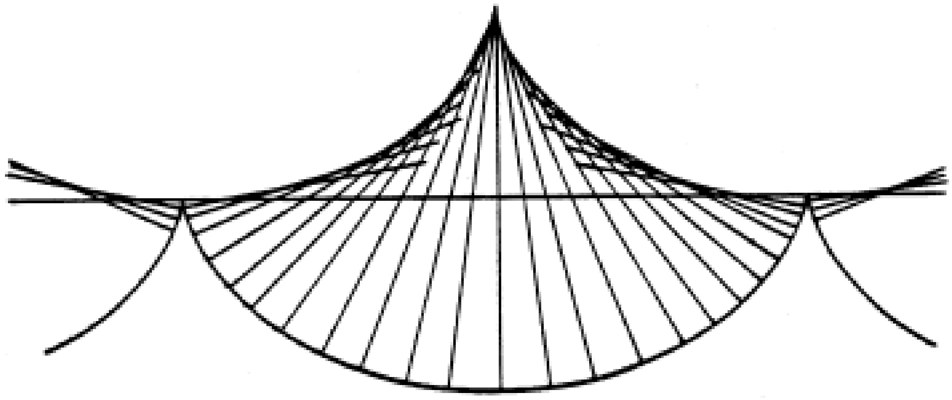


Fig. 6 : Génération de la cycloïde

Je ne suis pas d'accord avec Whiteside qui dans une note au volume III, p. 152, des *Mathematical papers* sur les inventeurs des développantes cite Appolonius, Newton et Huygens. Il n'y a aucune idée d'infinitésimal chez Apollonius liv. 5 : sur les lignes *maxima* et *minima*. L'auteur y recherche la distance minimale d'un point à une conique ou encore la perpendiculaire issue d'un point quelconque de la conique. Il compare donc la distance d'un point à la conique aux segments liant ce même point aux autres points de la conique. Pour ce faire, il commence par les points voisins, mais l'infinitésimal ne joue que par la constatation : le plus proche est déjà plus loin. Il montre encore l'unicité de la perpendiculaire issue de chaque point de la conique. Or, l'idée d'infinitésimal ou plutôt d'infiniment proche est indispensable pour parler de rayon de courbure comme le font Newton et Huygens. Ce rayon est définit par deux perpendiculaires à la courbe, perpendiculaires en des points infiniment proches.

Leibniz

Dans la *Meditatio nova de natura anguli contactus et osculi, horumque usu in practica mathesi ad figuras faciliores succedaneas difficilioribus substituenda*, qui provoque très probablement les deux Méditations susmentionnées, Leibniz donne une nouvelle dimension à son calcul.

> En considérant les parties infiniment petites de n'importe quelle courbe on peut étudier non seulement, comme on l'a fait jusqu'ici, sa direction, c'est-à-dire sa pente ou inclinaison, mais également les variations de la direction, autrement dit la courbure. Or, tout comme les Géomètres ont mesuré la direction des courbes par la ligne la plus simple ayant même direction en un point donné, à savoir la

tangente, je mesure de la même façon la courbure par la courbe la plus simple ayant au point considéré non seulement même direction mais aussi même courbure, à savoir le cercle qui est non seulement tangent à la courbe mais qui plus est la baise, ce que je vais expliquer dans un instant. Or si la droite est la plus propre à déterminer la direction d'une courbe, la sienne étant identique en tout point, le cercle est le plus propre à déterminer la courbure, puisque la courbure d'un cercle est partout la même. Je dis qu'un cercle baise une courbe donnée située dans le même plan en un point donné, lorsqu'il fait avec elle le plus petit angle de contact. Parmi les innombrables cercles tangents à une courbe en un point où la concavité ne varie pas, on peut toujours en effet en déterminer un qui se confonde davantage avec elle, qui pour ainsi dire s'y attache le plus longuement, c'est-à-dire pour parler le langage de la Géométrie, s'en approche au point qu'entre la courbe considérée et lui, on ne puisse tracer aucun autre arc de cercle rencontrant la courbe. Cet angle de contact minimal entre un cercle et une courbe, je l'appelle angle d'osculation, comme on appelle angle de contact le plus petit angle entre une droite et une courbe. Si en effet une droite et une courbe font entre elles un angle de contact, aucune autre courbe ne peut se loger entre elles, de même qu'aucun arc de cercle ne peut tomber entre un cercle et une courbe lorsqu'elles forment un angle d'osculation. Pour obtenir alors un moyen de trouver le cercle osculateur , il faut se représenter ceci : de même qu'on obtient les tangentes par des équations possédant deux racines égales, c'est-à-dire en faisant coïncider deux intersections, et les points d'inflexion par égalité de trois racines, on obtient les cercles osculateurs comme toute autre courbe osculatrice, par égalité entre quatre racines, c'est-à-dire la fusion de deux contacts en un[22].

Fig. 7, Illustration pour le texte de Leibniz

Tout d'abord, soulignons que ce texte se situe dans le schéma que j'ai esquissé au début. Comme la tangente donne une mesure de la direction de la courbe, ce n'est pas à elle qu'il faut faire appel pour mesurer la courbure. Il faut pour mesurer cette dernière faire appel à un cercle tangent, objet à courbure constante. Mais de tels cercles sont nombreux, confirme Leibniz, il faut donc en sélectionner un qui établit un contact particulier avec le cercle et qui mérite un nouveau nom : le cercle osculateur.

Dans le même esprit qu'Euclide et Apollonius, Leibniz dira qu'on ne peut plus insérer de cercle entre la courbe et le cercle osculateur en un point. Poursuivant l'analogie, il explique que comme on obtient les tangentes par des équations possédant deux racines égales, c'est-à-dire en faisant coïncider deux intersections, et les points d'inflexion par égalité de trois racines, on obtient les cercles osculateurs comme toute autre courbe osculatrice, par égalité de quatre racines, c'est-à-dire la fusion de deux contacts en un.

Une fois de plus, l'analogie est mauvaise conseillère, surtout si on omet les calculs. Leibniz commet là une erreur qui a occulté l'importance du texte et qui a influencé l'histoire.

[22] G.W. Leibniz, Meditatio nova de natura anguli contactus et osculi, horumque usu in practica mathesi ad figuras faciliores succedaneas difficilioribus substituenda, Acta Eruditorum, Juin 1686, Mathematische Schriften, Bd. V, p. 226, Traduction, à deux mots près, de M. Parmentier, La naissance du calcul différentiel, Mathesis, Vrin, Paris 1989, p. 118.

Laissons pourtant cette erreur un instant. Elle est commise dans la partie où Leibniz contrôle sa pensée en reprenant un raisonnement à l'ancienne, c'est-à-dire lorsqu'il énonce son idée dans les termes de la géométrie cartésienne alors en vigueur. Mais là n'est pas l'intérêt de Leibniz ni ce que Jacob Bernoulli y lira même si cette erreur le mettra dans l'embarras Mais n'est-elle pas déjà en partie résolue dans les deux *Méditations* que nous venons d'analyser. Le texte de Leibniz porte sur le calcul infinitésimal :

> En considérant les parties infiniment petites de n'importe quelle courbe on peut étudier non seulement, comme on l'a fait jusqu'ici, sa direction, c'est-à-dire sa pente ou inclinaison, mais également les variations de la direction, autrement dit la courbure (flexura).

Il veut étudier la courbure au moyen de son nouveau Calcul, comme il a étudié la direction au moyen des tangentes. Bel et bien mais qu'est-ce que cela veut dire ? Qu'est-ce que la courbure ? Lisons un texte que Leibniz a sûrement lu peu de temps auparavant puisque qu'il est publié par Wallis en 1685 et qu'il y fait très probablement allusion lorsqu'il définit l'angle d'osculation par une comparaison *« comme on appelle angle de contact le plus petit angle entre une droite et une courbe »*. Dans un texte sur l'angle de contact, Wallis[23] écrit :

> Je dis de plus ; que cette déflexion (deflexio) (qui éloigne la courbe de sa tangente et que l'on appelle habituellement angle de contact) n'est pas l'angle ou la déviation (pas plus que l'accélération n'est une vitesse) mais la déviation commençante ; qui montre le degré de courbure ; c'est-à-dire dans quelle mesure (raison) ou proportion elle s'éloigne de la droite ou de la direction qu'elle avait au point de contact.

Les termes de Leibniz prennent alors leur sens : cette courbure donne la variation de la direction, la variation de la dérivée donc la dérivée seconde ddx.. Nous verrons pourtant que les paroles de Leibniz dépassent plus que probablement sa pensée, mais que c'est bien ainsi que Jacob les a interprétées.

La découverte

La découverte de la formule du rayon de courbure par Jacob se situe dans une période qui précède janvier 1691 et est postérieure à 1689. Les datations sont pleines d'embûches, mais quatre textes semblent contenir la solution.

D'abord, la Med. CLXI, *De Spiralis Parabolicae (Parabolae helicoidis) dimensione*[24], où Jacob calcule le rayon de courbure, à la Descartes ou à la Huygens, sous une forme qui ne laisse pas transparaître les différences secondes, qui ne fait pas appel à l'élément de ligne et dont il ne donne pas le pendant en coordonnées curvilignes.

Pourtant, dans la marge, il a ajouté plus tard, les trois formes de son *theorema aureum* et l'élément de ligne.

Cette Méditation sera publiée sans les ajouts 1691, janvier dans son Op. XLI, Specimen Calculi differentialis in dimensione Parabolae helicoidis, ubi de flexuris curvarum in genere, earundem evolutionibus, aliisque:[25] en janvier 1691,

La découverte a donc très probablement lieu comme le dit Jacob dans son Op. LVIII, lors de ses recherches sur la voilière, *De figura veli vento inflati*[26], Mais comme Jacob y fait appel à la formule du rayon de courbure sous la forme du *theorema aureum* comme s'il

---

[23] J. Wallis, Defensio Tractatus de angulo contactus et semicirculi, Operum mathematicorum pars altera, p. 655.
[24] Jacob Bernoulli, Med. CLXI, T.P. 1689 - T.A. 1/1691, Manuscrit de l'Universitäts Bibliothek Basel, LI a 3.
[25] Jacob Bernoulli, *Acta Eruditorum*, Januarii, p. 13-23 ; *Opera omnia,* p. 431-442.
Jacob Bernoulli, Med. CLXV , T.P. 1689 - T.A. 9/3/1692.

s'agissait de quelque chose d'habituel une hésitation s'installe. Elle est effacée parce qu'il renvoie à Med CLXI. Il a donc du trouver ces expression entre les deux Med. Cela ne peut être postérieur car il y trouve l'équation de la voilière : adsddx = dy^3 qu'il enverra par lettre à Johann en Janvier 1691. La lettre a disparue mais le fait est corroboré par Johann dans sa publication sur la voilière[27] .

Nous trouvons dans cette équation, en plus des dérivées secondes ddx, l'élément de ligne ds qui s'est introduit via la physique. La force du vent est ads et agit suivant la perpendiculaire, c'est-à-dire suivant le rayon de courbure.

Il ne manque plus qu'un élément, Jacob n'y fait pas appel aux coordonnées curvilignes.

Le résultat des recherches de Jacob dans ce texte sera présenté sans aucun détail de calcul et sans donner l'expression du rayon de courbure, dans sa publication sur la voilière[28] en mai 1692, où il prend cependant date en énonçant l'équation dont il a déjà été question : *Si l'on considère des petits éléments de courbe égaux, les cubes des différences premières des ordonnées sont proportionnels aux différences secondes des abcisses.*

C'est à cette époque que son frère, Johann part pour Paris et y donne cours au Marquis de l'Hôpital[29]. Il part fin 1691 et restera jusqu'en 1692. A cette époque, il était encore dans les secrets de son frère puisqu'une démonstration donnant le rayon de courbure figure en Leçon 16.

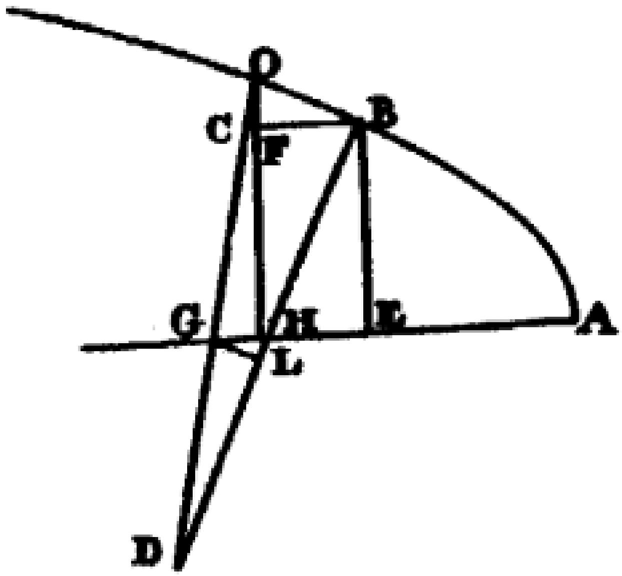


Fig. 9, Illustration des Leçons à de l'Hopital

> Il faut faire pour toutes les autres courbes géométriques ce qu'on a fait pour la Parabole, car en cela la géométrie cartésienne ne s'étend pas aux courbes mécaniques. C'est pourquoi on montre sans difficulté comment trouver, en toute généralité, par le calcul différentiel les centres des Cercles osculateurs de

[27] Johann Bernoulli, Op. VII, Solution du problème de la courbure d'une voile, *Opera omnia*, vol. 1, p. 59.
[28] Jacob Bernoulli, Op. XLVIII, *Curvatura Veli* : AE Maji 1692, p. 202-207 ; Opera omnia, p. 481-490.
[29] Johann Bernoulli, Op. CXLIX, Lectiones Mathematicae, de Methodo Integralium, aliisque, conscriptae in susm Ill. Marchionis Hospitalii, cum Auctor Parisiis ageret Annis 1691 & 1692 ; *Opera omnia*, vol. III, p. 385-558.

toutes les courbes qu'elles soient géométriques ou mécaniques. Soit donc une courbe quelconque donnée AB dont il faut trouver les centres des Cercles osculateurs. Nous avons montré supra que ceux-ci sont sur une courbe à partir du développement de laquelle la courbe donnée AB est engendrée, ou ce qui revient au même au point de concours D de deux perpendiculaires BD et OD distantes d'une quantité infiniment petite. Il s'agit donc de trouver la longueur BD à partir de l'abscisse AE et l'ordonnée BE. A cet effet, qu'on mène BC parallèle à AG et OF perpendiculaire à BC. Soient AE = x et EB = y ; partant, BF = dx et FO = dy ; on aura FC = $\frac{dy^2}{dx}$ et par conséquent, BC = $\frac{dx^2+dy^2}{dx}$ et, puisque $\frac{BF}{FO} = \frac{BE}{EH}$, on aura EH = $\frac{ydy}{dx}$, BH = $\frac{y\sqrt{dx^2+dy^2}}{dx}$ et AH = x+ $\frac{ydy}{dx}$; et sa différentielle (en posant ddx = 0) dx + $\frac{dy^2+yddy}{dx}$ = HG.

Mais comme $\frac{BC}{BG} = \frac{BD}{HD}$; on aura, en divisant, BC- $\frac{HG}{BC} = \frac{BH}{BD}$,

c'est-à-dire $-\frac{yddy}{dx^2} + dy^2 = \frac{\frac{y\sqrt{dx^2+dy^2}}{dx}}{BD}$.

Donc, on aura BD = $\frac{(dx^2+dy^2)\sqrt{dx^2+dy^2}}{-dxddy}$. De même, ceci aurait pu être trouvé autrement en disant $\frac{BO}{BF} = \frac{HG}{LG}$; donc LG = $\frac{dx^2+dy^2+yddy}{\sqrt{dx^2+dy^2}}$; alors, BO - $\frac{LG}{BO}$ = BL ou $\frac{BH}{BD}$, en vertu de quoi on obtient la même chose.

Le rôle de Leibniz

A la suite de Tchirnhaus, Johann calcule la caustique du cercle c'est-à-dire au moyen de la coïncidence de racines. Suivant donc la méthode cartésienne. Mais son article Op. VI, *Solutio Curvae Causticae per vulgarem Geometriam Cartesianam; aliaque* publié en janvier 1692, se termine par la remarque : *De plus mon Frère m'apprends que cette méthode peut être généralisée et permettre de déterminer la nature de toutes les évolutes et les caustiques c'est-à-dire des courbes que l'on obtient par intersection de perpendiculaires ou de rayons réfléchis*[30].

En Mars 1692, dans son Op. XLVII, Additamentum ad Solutionem Curvae Causticae fratris Jo. Bernoulli, una cum Meditatione de Natura Evolutarum, & variis osculationum generibus, Jacob poursuit cette réflexion et prend prétexte de la publication par Leibniz de son article sur la caténaire pour remettre en mémoire l'article de 1686 où Leibniz avait introduit l'osculation. Jacob n'est pas d'accord avec Leibniz lorsqu'il dit que l'osculation, contact d'un cercle particulier, le plus grand celui au-dessus duquel on ne peut en faire passer un autre sans couper, est la coïncidence de deux contacts, c'est-à-dire contact d'une courbe et d'une droite ou encore de deux fois deux points d'intersections ou racines. Pour Jacob, trois points ou racines suffisent, l'un des points pouvant participer aux deux contacts. Dit en termes cartésiens, on peut réduire l'équation ou la nature de la courbe en la divisant par $(x - a)^3$; en termes de Hudde, on peut la multiplier par le produit de trois

[30] Johann Bernoulli, *Acta Eruditorum*, Januarii, 1692 ; *Opera omnia*, vol. 1 , p. 52.

progressions arithmétiques mais en termes différentiels cela veut dire que le rayon de courbure est du second ordre ou encore, si Leibniz a raison, que la formule que Jacob a trouvée pour le rayon de courbure et qui est en ddx est fausse.

Il termine en calculant explicitement le rayon de courbure de la parabole au moyen des multiplicateurs de Hudde. Il est remarquable de constater que le même exemple se trouve chez Newton[31] et traité de la même façon avec le même choix de progression arithmétique.

Ce rappel par Jacob, d'un texte de Leibniz, qui date de 1686, permet de comprendre pourquoi Jacob promet (dans son Op. XLII, publié en juin 1691) de nouvelles choses sur *l'elastica* et sous-entendu, sur le rayon de courbure sans lequel il ne peut attaquer le problème mais qu'il continue à repousser l'échéance.

Les tests

Jacob va tester ses résultats et pour ce faire, il commence par publier en mai 1692, dans Jac. Op. XLIX, Lineae Cycloidales, Evolutae, Ant-Evolutae, Causticae, Anti-Causticae, Peri-Causticae. Earum usus & simplex relatio ad se invicem. Spira mirabilis. Aliaque[32], une relation non différentielle entre l'évolute et la caustique au moyen du rayon de courbure.

A la même époque, dans la Med. CXCII, Demonstratio Theorematis a Fratre animadversi (vid. Lit. ejus de 15 Martii 1692) Caustica Cycloidis vulgaris nata ex reflexis radiis parallelorum axi itidem est vulgaris cyclois, cuius basis est prioris dimidia[33],, il met à l'épeuve, le theorema aureum qui reçoit son nom pour la première fois, Il calcul les caustiques de toute une série de cycloïdes, epicycloïde … Puis il publie les résultats obtenus, Jac. Op. L,Additio ad Schedam de Lineis Cycloidalibus[34]. Mais dans la publication, le théorème auquel il est fait appel perd son qualificatif d'aureum et est remplacé par celui qui relie la caustique à la développante du Op. XLIX. Comme Jacob ne formule pas explicitement le théorème doré dans la Med CXCII, on pourrait croire qu'il s'agit de celui qui lie la développante à la caustique mais il n'en est rien car dans la Meditatio, le Theorema Aureum est bien censé fournir le rayon de courbure.

Nouvelle intervention de Leibniz,

En septembre 1692, Leibniz répond à l'article Op. XLVII de Jacob. Dans ce nouvel article, intitulé *Generalia de natura linearum, anguloque contactus & osculi, provolutionibus, aliisque cognatis, & eorum usibus nonnullis*[35], il maintient son erreur. Comme le remarque très justement M. Parmentier, il est en fait obnubilé par l'osculation au sommet de la parabole qui correspond bien à la coïncidence de deux contacts et donc de quatre points car cet exemple renforce sa manière de voir qui doit correspondre à celle que nous avons évoquée dans l'introduction. Or ce contact au sommet de la parabole correspond au point de rebroussement de la développée, il correspond donc à une singularité. Cet entêtement nous montre la difficulté qu'il y a à assurer la symbiose entre l'algorithme du calcul différentiel et sa représentation géométrique. Cet entêtement de l'homme le mieux placé pour comprendre, nous conforte dans notre interprétation des hésitations de Jacob à publier son théorème. Il attend le feu vert de Leibniz et ne le reçoit pas.

---

[31] I. Newton, *The mathematical papers*, vol. III, p. 175-177.
[32] Jacob Bernoulli, *Acta Eruditorum*, Maji 1692, p. 207-213 ; *Opera omnia*, p. 491-502.
[33] Jacob Bernoulli, Med. CXCII, T.P. 1/1692 - T.A. 6/1692, Manuscrit de l'Universitäts Bibliothek Basel, LI a 3..
[34] Jacob Bernoulli, *Acta Eruditorum*, Junii 1692, p. 291-296 ; *Opera omnia*, p. 503-510.
[35] Jacob Bernoulli, Op. XLVII, *Acta Eruditorum*, Septembris 1692, p. 440-446 ; *Opera omnia*, p. 543-548

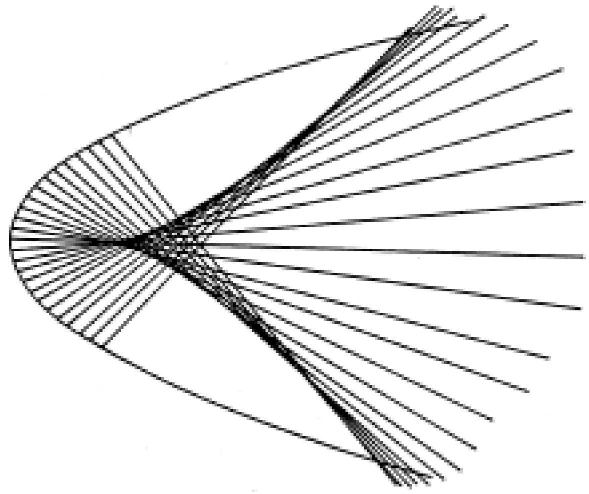


Fig.10, Développée de la parabole

A l'interprétation de l'osculation comme double contact, illustré par l'osculation de la parabole en son sommet ajoutons la notion de point d'inflexion[36] qui disait Leibniz devait être dû à un contact triple. C'était une de ses raisons de voir en l'osculation un degré plus élevé de contact pour imiter son expression et donc de supposer 4 points de contacts dans cette dernière. Or Jacob vient de le conforter dans cette idée de trois points de contacts pour l'inflexion :

> Il faut également remarquer que courbure minimale et ouverture maximale ont lieu en un point d'inflexion, et M. Bernoulli a déclaré très justement qu'en ce cas, le cercle osculateur dégénère en une ligne droite ; son rayon est en effet infini, son centre tombant au point d'intersection de la développée et de son asymptote.

Rappelons-nous la note marginale de la Méditation CLXI, dans l'inflexion $ddy = 0$.

En juin 1693, Jacob aborde après les caustiques par réflexion, les dia-caustiques obtenues par réfraction. Suivant son habitude, il donne des résultats en taisant le raisonnement. A la fin du texte, comme l'indique le titre : *Curvae Dia-Causticae, earum relatio ad Evolutas, aliaque nova his affinia. Item: Natura osculorum uberius explicata. Celeritates Navium definitae. Regulae pro Resistentiis, quas Figurae in Fluido motae patiuntur &c.* [37]: Jacob répond une nouvelle et dernière fois à Leibniz, enhardi, sans doute, par les résultats non contradictoires obtenus au moyen du théorème non différentiel liant la développante et la caustique. Mais il ne le convaincra toujours pas.

L'intervention de L'Hopital

Le 31 août 1693, coup de théâtre, L'Hopital publie une *Méthode facile pour déterminer les points des caustiques par réfraction avec une manière nouvelle de trouver les*

---

[36] Nous devrons également étudier ce point particulier chez Jacob.

[37] Jacob Bernoulli, Op. LVI, *Acta Eruditorum*, Junii 1693, p. 244-256 ; *Opera omnia*, p. 549-573.

développées[38], où il donne la formule du rayon de courbure de Jacob. Il donne, plus précisément, la formule que Jacob tait dans son Op. LVI : *Monsieur Bernoulli Professeur des Mathématiques à Basle a publié dans les Journaux de Leipsic du mois de Juin, une manière générale de déterminer dans toutes les courbes les points des caustiques par réfraction, en supposant les développées. Mais il supprime son analyse ; et il n'est pas aisé de la découvrir, par ce que la pluspart des voyes que l'on peut suivre dans cette recherche, mènent à des calculs très-pénibles & tres-ennuyeux. C'est pourquoy l'on a crû que ceux qui entendent le calcul différentiel seroient bien aises de trouver icy une méthode fort aisée, d'où l'on déduit immédiatement la construction de cet auteur.* Qui plus est, il en donne trois démonstration différentes. Mais se restreint à'une seule forme du théorème.

Dans cet article, L'Hôpital n'utilise pas les coordonnées curvilignes. Il le fera pourtant dans la lettre qu'il adresse à Johann le 2 septembre 1693, en reprenant le problème des Dia-caustiques et sans parler de sa publication. Mais Johann ne semble pas convaincu[39] et L'Hopital reprend la démonstration. Devant l'absence de réaction de Johann, il donnera une nouvelle démonstration en décembre[40]. Très simple, elle se base sur le fait que la différentielle du rayon de courbure doit être nulle

.

La publication.

Le temps presse, n'attendant plus l'assentiment de Leibniz Jacob décide de publier son *Theorema aureum*, en juin 1694 dans un article, Jac. Op. LVIII, sur l'elastica : *Curvatura Laminae Elasticae. Ejus Identitas cum Curvatura Lintei a pondere inclusi fluidi expansi. Radii Circulorum Osculantium in terminis simplicissimis exhibiti, una cum novis quibusdam Theorematis huc pertinentibus, &c.* [41]: Il s'excuse du retard mais annonce que celui-ci lui a permis d'ajouter le *generaliter*, c'est-à-dire la généralisation à l'étude du comportement d'une poutre dont le matériau répond à une loi de déformation quelconque et non restreinte à la loi linéaire de Hooke.

Il me semble que le récit que je viens de faire permet d'interpréter différemment de Truesdell[42] le passage qui débute ce texte et exprime les difficultés que Jacob a rencontrées :

> Je disais dans les Actes de 1691, p. 289 que ce problème est plus difficile que celui de la funiculaire et non sans raison. J'en tais certaines pour ne retenir que le fait que l'on a, dans le cas de la catenaire deux clefs sous la main, qui mènent à deux équations différentes, dont l'une exprime la nature de la courbe par la relation de celle-ci à ses coordonnées, l'autre par la relation de son fil évoluant à ces mêmes coordonnées; Alors que pour déterminer la nature de la courbe élastique il faut une clef de plus. On pourrait songer à vaincre cette difficulté comme dans les problèmes précédents mais en avançant, la victoire échape; dépourvu de cette autre clef qui donne en effet, la relation entre le fil évoluant, ou rayon du cercle osculateur (non de manière quelconque comme nous l'avons fait dans les AE de janvier 1691, Op. XLI, p. 22 mais) en termes simples et purement différentiels. Cela nous était déjà connu au moment où nous faisions ces spéculations sur le fil, et dont une bonne partie nous avait été fourni au hasard par mon frère; car il est d'une immense utilité dans la résolution de la Voilière.

---

[38] G. de l'Hôpital, *Mémoires de Mathématiques et de physique, tirez des registres de l'académie royale des sciences*, Paris, Imprimerie royale, 31 août 1693, p. 129-133.
[39] Lettre de de L'Hôpital à Johann Bernoulli du 7 octobre 1693, *Der Briefwechsel von Johann Bernoulli*, vol. 1, p. 192.
[40] Lettre de de L'Hôpital à Johann Bernoulli du 2 décembre 1693, *Der Briefwechsel von Johann Bernoulli*, vol. 1, p. 198.
[41] Jacob Bernoulli, *Acta Eruditorum*, Junii 1694, p. 262-276 ; *Opera omnia*, p. 576-600.
[42] C.A. Truesdell, Introduction aux *Leonardi Euleri Opera Omnia*, Série II, Vol. 11, sect. II, p. 88.

Ce passage confirme, en effet que c'est bien l'expression du rayon de courbure, donc Leibniz qui l'a retenu et qu'il a découvert cela en travaillant sur la voilière. Comme nous l'avions constaté sans pouvoir l'affirmer avec certitude.

Ce qui est nouveau, selon Jacob et que son frère ne connaît pas, ce sont les coordonnées curvilignes. Cela ne semble pas être le cas au vu de la correspondance de Johann avec de l'Hôpital. Signalons à ce propos l'influence plus que probable d'un texte publié par Leibniz quelques années plus tôt en avril 1692, *De linea ex lineis numero infinitis ordinatim ductis inter se concurrentibus formata easque omens tangente, ac de novo in ea re analyseos infinitorum usu.*

Ce texte dans lequel Leibniz introduit au moins deux nouveaux termes : coordonnées et paramètre a fait l'objet de nombreux commentaires. Je n'y soulignerai qu'un point : *Les Géomètres ont coutume d'appeler ordonnées des droites parallèles en nombre quelconque, tracées entre une courbe et une droite déterminée (la directrice) ; lorsqu'elles sont perpendiculaires à cette dernière, (qui joue alors le rôle d'un axe), on les nomme les ordonnées par excellence.* Jusque là rien de neuf le terme et l'idée sont chez Apollonius et donc présents à l'esprit de Jacob. La suite est plus intéressante : *Desargues a généralisé ceci en considérant également comme des ordonnées, des droites qui convergent vers un point unique commun ou qui divergent à partir de lui.* Là non plus l'idée n'est pas neuve et Leibniz la fait remonter à Desargues. Mais l'important est qu'elle soit remise dans la tête de Jacob.

Et la réaction de Leibniz ?

En août 1694, Leibniz loue le résultat sur le rayon du cercle osculateur obtenu par Jacob dans LVIII, dans sa *Constructio propria Problematis de Curva Isochrona Paracentrica*[43] et souligne l'importance du rayon osculateur.

Pourtant, est-il pensable qu'il n'ai pas vu l'incompatibilité avec sa conception de l'osculation ? En tout cas, il est aveuglé par l'algorithme : *Et, ce qui est digne d'être mentionné, on peut obtenir ce résultat, sans considérer la figure, uniquement en faisant appel au Calcul que nous avons proposé.* Il dissocie donc le géométrique de ce dernier. La correspondance qu'il échange avec Johann montre qu'il lui faudra encore un an avant de reconnaître son erreur.

Le 24 juin 1695 il persiste dans son erreur dans une lettre[44] à Johann et il faudra attendre une nouvelle lettre[45] contenant une nouvelle fois l'explication de Jacob sur la nature de l'osculation pour que finalement Leibniz s'avoue vaincu[46] sur ce point en juillet 1695.

---

[43] Jacob Bernoulli, *Acta Eruditorum*, Augusti 1694, p. 364-375 ; *Opera*, p. 627-637.

[44] Ce point a été signalé par M. Parmentier, p. 223. Lettre de Leibniz à Johann Bernoulli du 24 juin 1695, *Commercium epistolicum et mathematicum, Tomus primus*, Lausanne et Genève, 1745, p. 65.

[45] Lettre de Leibniz à Johann Bernoulli op. cit., de juillet 1695, *Commercium epistolicum et mathematicum,* Tomus primus, Lausanne et Genève, 1745, p. 74.

[46] Lettre de Leibniz à Johann Bernoulli du 29 juillet 1695, *Commercium epistolicum et mathematicum*, Tomus primus, Lausanne et Genève, 1745, p. 82 .

CONCLUSION

Mais où réside l'apport de Jacob ?

Un premier élément est donné par trois lettres échangées par Johann et de l'Hôpital :
Le 31 décembre 1694, L'Hopital écrit. à Johann.

> Pour ces theoremes dorez dont il fait tant de cas et desquels il dit … de quibus nec fratri adhuc constat, il me semble qu'il se fait tort en estimant trop des choses si faciles, vous vous ressouviendrez aisément qu'il y a plus d'un an que je vous envoyé une methode que j'avois trouvée pour determiner les points des caustiques par réfraction, de laquelle on tiroit la construction qu'il a fait mettre dans les actes. Je m'y servois de ces mêmes théorèmes, et je la fit insérer dès ce temps dans nos mémoires ; de sorte qu'ils ne parroîtront pas nouveaux [47] . Il marque sur la figure les différences secondes et en tire ensuite par la comparaison des triangles semblables la valeur du rayon de la développée, ce qui est très facile lorsque les appliquées sont parallèles ; mais lorsqu'elles partent d'un même point, la chose me paroît plus embrouillée, et je vous prie de me mander de quelle manière il faut s'y prendre. Car j'ai suivi en les cherchant une route bien différente, et que je trouve beaucoup plus simple, n'ayant point besoin de marquer ces différences secondes. La voici :

Le 12 janvier 1695, Johann lui répond.

> C'est avec raison que vous vous raillez de ses théorèmes dorez dont il fait tant de cas et desquels il dit de quibus nec fratri adhuc constat, ce qui étoit aussy tout à fait hors de son sujet, apparemment pour faire parade de sa science et diminuer la mienne ; cependant j'ay jugé des theorèmes si faciles à trouver que je n'ay pas daigné seulement d'y répondre, en disant simplement dans ma construction de la courbe de descente nex opus habeo radiis circulorum osculantium in spiralibus qui tamen et ipsis nullo labore inveniuntur. Je me souviens maintenant que vous m'envoyâtes il y a longtems une methode pour déterminer les poins des caustiques où vous vous serviez de ces mêmes theorèmes, je suis faché de n'y avoir plus pensé avant que j'envoyasse ma construction de la courbe de descente à Leipsic ; je vous propeste que j'y en aurois fait mention exprès, pour apprendre à mon frère de parler un peu plus modestement de ses inventions qui sont déjà connues à d'autres48.
>
> Vôtre manière de trouver les théorèmes dorez, c'est-à-dire le rayon de la développée lorsque les appliquées partent d'un même point est très simple et très naturelle ; vous voulez pourtant sçavoir de quelle manière il se faut prendre si on veut trouver ce même rayon en marquant sur la figure les différences secondes ; voicy comment je le fais :

C'est la représentation géométrique que le Marquis appellera le marquage dans son analyse des infiniment petits qui est un des points essentiels de Jacob et il va de pair avec la vision géométrique de la répétition du triangle caractéristique au deuxième ordre. Ce que Jacob avait trouvé dans la Med sur la voilière, ddx est à ddy comme dx est à dy.

---

[47] Der Briefwechsel von Johann Bernoulli, Bd. 1, Birkhäuser, Bâle 1955, p. 251-252.
[48] Der Briefwechsel von Johann Bernoulli, Bd. 1, Birkhäuser, Bâle 1955, p. 255-256.

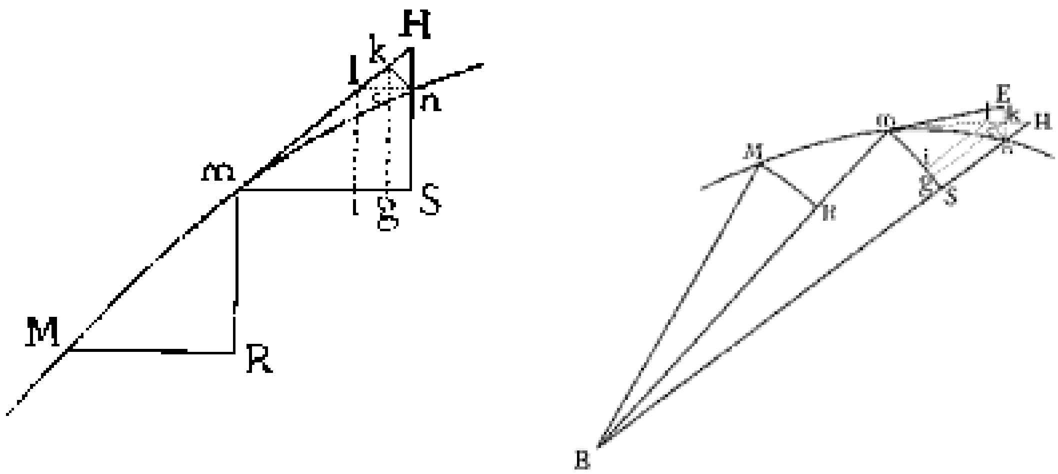


Fig. 11 et 12, Deux représentations (marquage) des dérivées secondes par le Marquis de l'Hopital dans son *Analyse des infiniment petits.*

Un autre élément nous est donné par Jacob lui même. Dans son deuxième grand texte sur *l'elastica*, il nous montre l'importance que ce rayon joue en mécanique. En décembre 1695 *Explicationes, Annotationes, et Additiones ad ea, quae in Actis sup. anni de Curva Elastica, Isochrona Paracentrica, & Velaria, hinc inde memorata, & partim controversa leguntur; ubi de Linea mediarum directionum, aliisque novis*[49] donne explicitement la mise en équation de son problème de *l'elastica*, Elle est basée sur le principe que les forces tendantes sont inversement proportionnelles aux rayons des cercles osculateurs

Finalement Jacob a compris que cette formule lui permettait de contrôler ses résultats en les transposant dans l'ancienne géométrie des développées introduite par Huygens.

[49] Jacob Bernoulli, Op. LXVI, *Acta Eruditorum*, Decembris 1695, p. 537-553 – *Opera Omnia*, p. 639-663.