NOMBRE ET PRATIQUES CALCULATOIRES DANS LA TRADITION COMMERCIALE DU XVE SIECLE : L'EXEMPLE DES « ARITHMETIQUES » DU SUD DE LA FRANCE

INTRODUCTION

Le XVe siècle est jalonné par la parution d'arithmétiques pratiques dont la destination première est le milieu du commerce. Il s'agit d'apporter aux marchands les rudiments mathématiques nécessaires à l'exercice de leur négoce. Contrairement à l'Italie du Nord, où de tels ouvrages foisonnent, les traités conservés en France sont peu nombreux : on en connaît à peine une dizaine pour les régions du Midi, de la vallée du Rhône aux Pyrénées en passant par la Provence. Ils sont écrits en langue vulgaire pour pouvoir atteindre leur public et cet usage semble aller de soi. Le Niçois Jouan-Francès Fulconis, qui enseigne l'écriture et l'arithmétique à Nice au milieu du siècle suivant, et publie la *Cisterna fulcronica* en 1562, est l'un des rares à justifier son choix : « Ce livre, pour la commodité des jeunes enfants et des autres de ce pays des terres neuves de Provence et qui par ailleurs ne comprendraient pas le latin, a été composé en langue maternelle »[1].

Le premier traité connu d'arithmétique commerciale et originaire du Midi a été écrit en occitan dans la ville de Pamiers. Ce texte anonyme, que l'on peut baptiser *Compendi d'algorisme*, ou simplement manuscrit de Pamiers, date des années 1420-1430 et a profondément marqué les arithmétiques qui lui ont succédé. L'influence des traités italiens de même facture, dits « traités d'abbaque », y est patente. Et par l'intermédiaire de ces ouvrages, c'est le plus lointain *Liber abbaci* de Léonard de Pise[2] que l'on rejoint. Cependant d'autres sources, encore très mal connues, ont marqué l'écriture du manuscrit de Pamiers ; elles proviendraient de la Péninsule ibérique. Tous ces traités sont qualifiés d'« algorismes ». On y enseigne en effet le calcul écrit, à l'aide du système positionnel indo-arabe. Ce système s'est répandu en Europe dès le XIIe siècle à partir des traductions latines de l'arithmétique d'al-Khw♠rizm⊂, d'où leur nom.

Le rôle de ces ouvrages est d'enseigner les mathématiques nécessaires aux transactions commerciales. Cela dirige le contenu (opérations et résolutions de problèmes) et les méthodes (fondées sur la répétition, l'apprentissage de savoir-faire via des recettes ou des algorithmes). Un ensemble de techniques est mis en place, qui permettent d'opérer sur des nombres et qui sont immédiatement mises au service de calculs concrets : dénombrement d'objets, bilans financiers, opérations sur des mesures de longueur, de poids, etc.

Dans un tel contexte, ce n'est pas le concept abstrait de nombre qui importe, mais l'apprentissage du calcul sur des quantités qualifiées de nombres et leur manipulation dans

---

[1] « Quest present libre, per comoditat de joines enfans & altres de quest pays de terra nova de Provensa, & d'altre part non entendent Latin, es compausat en lenga materna ». *Jouan-Francès Fulconis, La cisterna fulcronica*, réédition de l'ouvrage imprimé en 1562. Transcription, traduction et commentaires de Roger Rocca, Nice, Lou Sourgentin, 1996, p. 95.

[2] Le *Liber abbaci* a été écrit en 1202. Une seconde version date de 1228. Celle-ci a été éditée par Baldassarre Boncompagni en 1857 : B. Boncompagni, *Scritti di Leonardo Pisano, matematico del secolo decimoterzo, vol. 1 : Il Liber Abbaci di Leonardo Pisano, pubblicato secondo la lezione del codice Magliabechiano C. I, 2616, Badia Fiorentina, n° 73*, Tipografia delle scienze matematiche e fisiche, Rome, 1857.

des situations concrètes. Un calcul sur quelles classes de nombres ? Essentiellement des nombres entiers et « rompus », dits « rouptz » ou « routz ». Les seconds naissent naturellement de la « partition » des nombres entiers : diviser un nombre en parts égales, c'est le rôle assigné à l'opération division. Mais diviser – ou « partir », selon l'expression du temps – c'est aussi partager un nombre en parties inégales, moyennant certaines relations. Ces problèmes ne sont pas gratuits : ils sont induits par l'activité de mesure, ils sont provoqués par des situations du négoce[3]. Le nombre rompu, dont il sera longuement question plus loin, qui participe des mêmes besoins opératoires que le nombre entier, entre à cette occasion dans le même domaine mathématique. Le statut du nombre n'est pas pour autant clairement établi et les traditions de l'arithmétique spéculative viennent parfois s'immiscer en contradiction dans le contexte pratique. Intervient aussi l'auteur, avec sa personnalité et sa culture, qui, sans en modifier l'esprit, infléchit le contenu de son ouvrage. Un cas intéressant pour cette étude est celui de Barthélemy de Romans. Il nous permet en effet d'évaluer à la fois les liens et le fossé entre pratique et théorie. Docteur en théologie, maître d'algorisme, il connaît bien les deux versants de l'arithmétique, la spéculative et la pratique. Il est l'auteur d'un *Compendy de la praticque des nombres* écrit autour de 1450 qui sera revu et corrigé une vingtaine d'années plus tard par un certain Mathieu Préhoude, clerc de son état. Enseignant la « science d'algorisme » à Carcassonne, Barthélemy est prié par ses écoliers de rédiger un traité afin de les éclairer sur les problèmes de proportionnalité, qui gouvernent les questions commerciales. Barthélemy compose alors une *Spéculative des* nombres, dont la finalité –un soutien théorique à un ouvrage de pratique– est clairement annoncée.

Trois lieux essentiels permettent de scruter l'idée de nombre dans les traités d'algorisme. D'abord, les dissertations générales dans les préfaces, mais aussi dans les introductions et notes internes aux chapitres. Ensuite, la description des techniques, dans la pratique des opérations. Enfin, la résolution des problèmes. Ce sont ces trois lieux que je vais parcourir, en m'appuyant sur les ouvrages du corpus des arithmétiques méridionales françaises[4].

I. LE ROLE DE LA TRADITION SAVANTE DANS LA PERCEPTION DU NOMBRE

Le statut de la définition

Au XV^e siècle, le mot « définition » est étranger aux arithmétiques de type pratique. Ce qui n'empêche pas leurs auteurs de fournir des définitions en réponse à des questions du type « Que est ? », « Que signifie ? », « Que veult dire ? ». La définition explique, de manière plus ou moins précise, plus ou moins intuitive, ce que sont les objets concernés. Par exemple, à la question « Que est proportion premiere ? », le *Compendy de la praticque des nombres* répond : « Proportion premiere est de laquelle les nombres encommencent a 1 et le second nombre est denominateur de la proportion, lequel multiplie soy mesme et tous les autres suyvants »[5]. C'est une suite d'exemples répétitifs qui installe aussitôt le sens.

---

[3] Voir l'article de Paul Benoit, « Arithmétiques commerciales et comptabilités dans la France médiévale », in P. Benoit, K. Chemla, J. Ritter (éds.), *Histoire de fractions, fractions d'histoire*, Bâle/Boston/Berlin, Birkhaüser, 1992, p. 307-323. Paul Benoit montre comment les fractions s'imposent peu à peu dans les systèmes de mesure.

[4] La liste de ces arithmétiques est établie en annexe, avec indication de la date, de la langue d'écriture, des éditions éventuelles.

[5] Barthélemy de Romans et Mathieu Préhoude, *Compendy de la praticque des nombres*, fol. 155v. Une proportion première est une suite géométrique de premier terme 1. Le « denominateur » de la proportion est ce qui la définit, c'est-à-dire la raison.

Les références savantes à l'arithmétique

Après les louanges d'usage à la Vierge ou à un saint local, la plupart des introductions aux algorismes insistent, d'une part, sur la primauté de l'arithmétique parmi les sciences du *quadrivium*, d'autre part sur l'utilité de l'algorisme dans le domaine du commerce et aussi pour toutes sortes de comptes[6]. Le Niçois Francès Pellos souligne la nécessité de cet art, non seulement pour les marchands, mais pour toute personne de quelque condition qu'elle soit : « Las dichas arts son necessari, nedum a merchans, mas ad ogni persona de che condition se vulha sia »[7]. Mathieu Préhoude précise dans le *Traicté de la praticque d'algorisme* que l'arithmétique, l'un des sept arts libéraux, est utile à bien des gens « pour ce que par icelle prestement et legierement se pevent faire tous comptes et toutes raisons tant en marchandyes, en faict de change, en geometrie, en astronomie » (fol. 7).

Dans le domaine de la « spéculative », le nombre est considéré de trois manières. C'est Barthélemy de Romans qui nous le dit : « La premiere que chascun nombre se considere en soy mesmes. La seconde se considere selon que ung nombre se compare a l'aultre. La tierce selon que les nombres se comparent aux sciences de geometrie »[8]. Les deux premières distinctions fournissent les deux parties principales des arithmétiques dues aux auteurs grecs tardifs. Nous allons examiner dans quelle mesure ces trois aspects sont encore présents dans les arithmétiques commerciales.

Les définitions du nombre

Contrairement à l'ouvrage de Fulconis mentionné plus haut, dont le premier chapitre est intitulé « Diffinition del nombre… », et à certains traités d'abbaque italiens, aucune des arithmétiques méridionales du XV^e siècle ne s'attarde à définir le nombre, à savoir le nombre entier dans le sens hérité de la tradition grecque. Les algorismes latins du XII^e siècle, issus de l'œuvre d'al-Khw♠rizm⊂ et soumis en partie à l'influence de Boèce[9], reprennent la définition d'Euclide : « un nombre est la multitude composée d'unités »[10], ou bien l'une de celles du *De Institutione arithmetica* de Boèce : « Le nombre est une collection d'unités[11]. Au XIII^e siècle, Sacrobosco reprend à son compte ces deux définitions. Quant aux traités en latin ou en vulgaire qui en dérivent, beaucoup n'y consacrent pas un mot.

Dans l'arithmétique italienne dite de Trévise, imprimée en 1478, dont le caractère pratique est très marqué, plusieurs lignes concernent toutefois la définition du nombre entier. Un nombre est « una moltitudine congregata overa insembrada da molte unitate e al meno da do unitate come e 2, il quale e lo primo e menore numero che se truova »[12]. L'auteur ajoute alors la définition euclidienne de l'unité. De telles précisions ne sont pas

---

[6] Pour l'auteur du *Compendi* de Pamiers, par exemple, les sciences du *quadrivium* ne peuvent être entendues sans la connaissance de l'algorisme, qui permet de faire toutes sortes de comptes : « per so trobec maniera et art per lo qual cascun pot breument comprendre et avisar tota manieyra de contes » (fol. 16).

[7] « Les dits arts sont nécessaires, non seulement aux marchands, mais aussi à toute personne de quelque condition qu'elle soit ». Francès Pellos, *Compendion de lo abaco*, fol. 4.

[8] Barthélemy de Romans, *Speculative des nombres,* Cesena, Biblioteca Malatestiana, ms S-XXVI-6, fol. 269. La première manière traite des propriétés intrinsèques des nombres (pair, premier, etc.) et la seconde des rapports entre les nombres.

[9] André Allard, *Muhammad ibn M)s♠ al-Khw♠rizm⊂. Le calcul indien (algorismus) : versions latines du XII^e s.*, Paris, Blanchard, 1992, et « The Arabic Origins and Development of latin Algorisms in the Twelfth Century », *Arabic Sciences and Philosophy* I (1991), 233-283.

[10] Définition 2 du Livre VII des *Eléments*, traduction de Bernard Vitrac, *Euclide, les Eléments*, vol. 2, Paris, puf, 1994, p. 247.

[11] *Boèce, Institution arithmétique*. Edition bilingue de Jean-Yves Guillaumin, Paris, Les Belles Lettres, 1995, p. 12.

[12] « une multitude agrégée ou assemblée à partir de plusieurs unités et au minimum de deux, comme 2, lequel est le premier et plus petit nombre que l'on trouve » (fol. 1v). *Arte de labbacho*, dite *Arithmétique de Trévise*, imprimé à Trévise en 1478, trad. par F. J. Swetz in *Capitalism and Arithmetic : the New Math of the 15th Century,* La Salle Illinois, Open Court, 1987.

courantes, du moins dans le corpus étudié ici ; et seraient-elles d'usage, il ne faudrait y voir que la persistance d'une tradition devenue stérile. Car là n'est pas le sujet. On le voit très bien dans l'arithmétique de Trévise où, une fois l'unité définie, l'auteur passe immédiatement à la classification des nombres dans le système positionnel : simple (de 1 à 9), article (multiple de dix) ou composé. Il ne poursuit pas sur les propriétés des entiers chères aux néo-pythagoriciens et objets de l'arithmétique spéculative. On le voit encore plus clairement dans le comportement de Barthélemy de Romans : Dans son *Compendy de la praticque des nombres*, il ne se soucie même pas de préciser ce qu'il entend par nombre alors que dans la *Spéculative des nombres*, il donne non seulement une définition classique du nombre entier, « colection d'unitez ou ung mont venu par la congregation de plusieurs unitez » (fol. 269v), mais précise aussi le statut de 1 et surtout des nombres rompus que l'on peut assimiler pour le moment aux fractions comprises entre 0 et 1. (fol. 273v-274) :

> Que 1 n'est nombre rout. La diffinition ne convient a 1 car 1 n'est pas collection d'unitez. Ne luy convient la division car il n'est pas nombre auquel tant seulement convient[13].

La diffinition ne convient au nombre rout car proprement nombre rout est moins de 1 ou est moins en parties.

Le rôle spécifique de zéro et la distinction 1, 2, plusieurs

Au même titre que les neuf autres chiffres, 0 sert à « nombrer les nombres », c'est-à-dire à les exprimer. Zéro est cependant isolé des autres car il représente ce qui ne vaut rien, il n'est pas « significatif », il n'exprime pas une quantité. C'est une « figure de non rien » ou de néant, d'où un statut particulier. En revanche, dans l'écriture d'un nombre, il a un sens en exprimant l'absence d'unités d'un certain ordre, comme l'écrit Jehan Certain dans le *Kadran aux marchans* : « En chiffres[14] ne sont que dix figures desquelles les neuf sont significatives et ont valeur et la disiesme ne vault riens mais elle fait valloir les autres figures […] ». Jehan Certain nomme *chiffre* ou *zero* cette dixième figure. Le même type de remarque se renouvelle dans toutes les arithmétiques qui suivent l'algorisme de Pamiers, sous une forme très proche[15]. Aucun commentaire n'est fait sur 1, contrairement à certains traités d'abbaque italiens : « La unitate e quella cosa da la quale ogni cosa si ditta una » écrit l'auteur de l'arithmétique de Trévise (fol. 1v) en suivant Euclide. De même, Piero Borghi qui fait imprimer à Venise en 1484 la « nobel opera de arithmetica ne la qual se tracta tute cosse a mercantia », fait référence explicitement à Boèce et souligne que 1 n'est pas un nombre car il en est le principe. Borghi précise alors que son but étant de parler des choses de marchandise, il laissera de côté toute considération étrangère à ce propos[16].

Lorsque Euclide veut représenter un nombre quelconque de quantités, il en prend trois, voire quatre lorsque c'est nécessaire[17]. La distinction ancienne entre 1, 2 et les autres entiers est manifeste dans la résolution de toute une série de problèmes du *Compendy de la praticque des nombres*, où elle préside à la classification des exemples. Il s'agit d'exercices qui mettent en cause une progression arithmétique et des fractions[18]. Les différents cas

[13] Il ajoute plus loin (fol. 274) : « 1 est comancement et fondement et cause material de tout nombre ».
[14] Pour Jehan Certain, *chiffre* est l'un des vocables désignant l'algorisme.
[15] Dans le manuscrit de Pamiers, on lit : « […] las quals comunament se appellan chifras mas propriament se appellan figuras de las quals las 9 se appellan figuras significativas et la desena se appella chifra o figura de non res car non val res mas que fa valer las autras segont lo loc en que es » (fol. 18).
[16] *Piero Borghi, Arithmetica, Venedig 1484*, éd. Graphos, Munich, 1964, fol. 1v.
[17] Par exemple, dans la proposition 33 du livre VII (« Etant donné des nombres en quantité quelconque, trouver les plus petits parmi ceux qui ont le même rapport qu'eux »), la démonstration débute par : « soient des nombres donnés A, B, C en quantité quelconque » (trad. B. Vitrac, op. cit. note 10, vol. 2, p. 342).
[18] Problèmes de « progressions composées », fol. 248v-266v. Une fraction et une suite arithmétique sont données. Il s'agit de partager équitablement une somme inconnue entre un nombre inconnu de personnes moyennant des règles de partage qui mettent en jeu la fraction et la progression. Voir M. Spiesser, *Entre théorie et pratique :* le Compendy de la praticque

exemplaires sont ordonnés par rapport à la comparaison du premier terme et de la raison de la progression d'une part, par rapport à la nature de la fraction d'autre part : « exemples de une partie », exemples de deux parties », « exemples de plusieurs parties » correspondent respectivement aux fractions de type $\frac{1}{q}$, $\frac{2}{q}$ et $\frac{p}{q}$ avec $p > 2$.

Le nombre et la géométrie : homogénéité et dimension

Pour introduire le chapitre sur les racines carrées et cubiques, l'auteur anonyme du manuscrit 456 conservé à la médiathèque de Nantes écrit (fol. 22v) :

> Pour savoir extraire et trouver la racine quarree d'aucun numbre, soit carré ou non, ou la plus prouchaine partie quarree d'icelui numbre, fault savoir que tout numbre quarré est celui qui contient autant de large que de long, comme seroit une piece de terre, pierre ou boys, qui auroit 324 piés en sa superficie dont 18 est la racine.

Introduction très pragmatique, qui se réfère à des exemples issus de l'environnement. Tout autre est la référence de l'auteur du manuscrit de Pamiers, qui sera reprise plus tard en termes quasiment identiques par Mathieu Préhoude dans son *Traicté de la praticque des nombres* (fol. 124) :

> Mais premierement est bon de savoir que les termes et vocables des mesures et des figures de la quantité continue de laquelle traicte geometrie, par aucune semblance se trouvent en la quantité discrete de laquelle traicte arismeticque. Par quoy pour entendre quels sont les nombres qui ont racine, premierement est besoing d'entendre les vocables generalz des figures de geometrie […]. Quantité continue generalement se divise en troys parties, c'est assavoir ligne, plan et corps. Ligne est longueur sans largeur, laquelle se termine en deux points indivisibles. Plan est la superficie de une chascune chose. Et est longueur et largeur, duquel les termes sont la ligne. Corps est une chascune chose qui a longueur, largeur et profondeur, duquel les termes est le plan.

Préhoude passe en revue sur presque quatre pages les différents types de nombres plans et solides, avant d'entrer dans le vif du sujet, la définition et la recherche des racines carrées et cubiques. Ces longues introductions qui reprennent un thème de la seconde partie de l'*Institution arithmétique* de Boèce sont exceptionnelles. On peut donc penser que l'auteur de l'arithmétique de Pamiers, s'il est bien le créateur du texte, est un clerc instruit de l'arithmétique théorique des néo-pythagoriciens. Pamiers est une ville qui fut un temps dotée d'une faculté des arts, où les ordres mendiants sont bien représentés et où l'enseignement semble dynamique[19].

Les exemples cités, qui ne sont pas exhaustifs, montrent que la tradition grecque tardive de l'arithmétique, connue essentiellement à travers l'œuvre de Boèce, continue à marquer les esprits, même dans les arithmétiques pratiques. Parfois, c'est le cas du dernier exemple, les références savantes sont une volonté de l'auteur, parfois il semble que ce soit une tradition à laquelle l'auteur se soumet implicitement. Cependant, cette tradition, nous allons le voir, n'a pas d'influence notable sur le rôle joué par les arithmétiques marchandes dans l'évolution de l'idée de nombre, évolution qui se fait jour bien avant le XV^e^ siècle, avec la diffusion de la science arabe, mais que la multiplication des traités commerciaux au début de la Renaissance contribue à installer solidement.

Si le « nombre » est encore entier par principe, certains auteurs prennent soin de le qualifier par les adjectifs « entier » ou « sain ». Pellos est l'un de ceux-là. Par exemple, le chapitre sur la division est intitulé : « Lo quart capitol que ensenha de partir tot numbre san

---

des nombres *de Barthélemy de Romans et Mathieu Préhoude (1471). Aspects mathématiques, linguistiques et culturels*, thèse de l'E.H.E.S.S., 1999, tome 1, ch. 6.

[19] J. de Lahondès, « Les écoles dans une petite ville avant la Renaissance », *Mémoires de la Société archéologique du midi de la France*, tome 12 (1883), 392-403.

ho entier » (fol. 10). Pour le même Pellos, il y a deux sortes de nombres : entiers ou rompus, car tout nombre qui n'est pas entier est rompu. Le gentilhomme niçois est à l'unisson avec l'auteur du *Compendi* de Pamiers qui écrit, lorsqu'il introduit les fractions au feuillet 51 : « et so que non es un entier es rot ». Dans le contexte de l'arithmétique pour les marchands, Barthélemy de Romans traite aussi à pied d'égalité nombre entier et nombre rompu : la thèse qu'il soutient dans la *Speculative des nombres*, à savoir « que le nombre rout n'est nombre » est oubliée dans son *Compendy*. Nombres entiers et nombres rompus participent des mêmes usages et des mêmes calculs.

II. LE NOMBRE, OUTIL DE MESURE ET OBJET DE CALCUL

Le plan des arithmétiques commerciales du corpus considéré dans cette étude est fidèle à celui de la première arithmétique occitane connue, l'algorisme dit de Pamiers. Après avoir énuméré les chiffres et enseigné la manière de les composer pour écrire et lire les nombres entiers, les opérations sont présentées, d'abord sur les entiers, ensuite sur les fractions. L'ordre est immuable : addition, soustraction, multiplication et division. Viennent en dernier les calculs de racines carrées et cubiques dont l'étude – c'est la seule différence importante entre les textes – n'est pas toujours faite. Jehan Certain, auteur du *Kadran aux marchans*, dont le propos s'éloigne peu de son objet, la formation au commerce, juge sans doute ce chapitre inutile pour guider les marchands, puisqu'il n'en parle pas. Les opérations sur les entiers et sur les fractions forment toujours deux parties distinctes. Le but est d'appliquer ensuite les méthodes aux nombres « avec unités » qui interviennent dans la vie quotidienne. Je vais examiner successivement le statut des opérations et celui des quantités sur lesquelles on opère.

Opérations et mesure

La finalité commune des arithmétiques marchandes est d'opérer sur des quantités dans des activités de mesure. Un apprentissage des opérations sur le nombre « abstrait », au sens où il n'est pas lié à une unité de mesure, est un préalable nécessaire à des applications concrètes. Ainsi, la troisième partie du traité de Préhoude, qui s'étend sur quinze pages (fol. 26 à fol. 33), a pour titre : « Cy commence la tierce partie qui demonstre la maniere d'applicquer addition, sustraction, multiplication et division tant du nombre entier que du nombre roupt ».

L'objet est donc d'expliquer puis d'illustrer des règles opératoires. Certains auteurs n'introduisent même pas l'opération, dont la signification est supposée connue du lecteur. Les autres ont recours à la langue vulgaire courante pour décrire : ajouter, c'est « mettre ensemble », soustraire c'est ôter ou « lever », diviser c'est « partir ». Seule la multiplication échappe à cette possibilité. Multiplier un entier par un autre n'étant pas défini à partir d'additions successives, la définition pose davantage de problèmes. Pour Jehan Certain, multiplier « vault autant à dire comme faire d'une petite somme une grande » (fol. 10a). L'auteur de *l'Art d'arismetique* (ms BNF, fds fr. 2050) « oublie » la définition de la multiplication et celui de l'arithmétique du manuscrit 456 de Nantes explique que « Multiplication est multiplier et augmenter aucune somme ou numbre par luy mesmes ou par aultre » (fol. 10v). De fait, le sens des opérations n'est accessible que s'il est déjà connu ou si un exemple vient de suite l'éclairer : « Diviser, écrit l'auteur de *l'Art d'arismetique*, est partir une somme en plusieurs parties come sy vouz estes plusieurs qui ayes gagner une somme d'argent et voullés savoir combien il en vient de chacun, vous le pouvés savoir par la regle de division » (fol 24). Seul l'auteur du manuscrit de Pamiers affronte les difficultés en accordant beaucoup de soin à l'introduction des opérations. Il définit la soustraction comme « contraire » de l'addition, la division comme « contraire » de la multiplication.

L'introduction à la division est très longue (fol. 31v à fol. 32v). Il envisage des parts égales ou inégales et donne deux définitions de la division en parts égales, beaucoup plus précises que toutes celles que l'on rencontre par ailleurs : « Partir es cercar un nombre lo qual es contengut entierament tantas vegadas en lo nombre que se partis com ha de unitatz en lo nombre que es partidor. Et la segonda diffinittio es : partir un nombre < es cercar un nombre > que demostre quantas vegadas lo nombre partidor entierament es contengut en lo nombre que se partis »[20] (fol. 32). Autrement dit, diviser *A* par *B* c'est chercher un nombre qui soit contenu *B* fois dans *A* (première définition), ou aussi chercher combien de fois *B* est contenu dans *A* (deuxième définition). Ces définitions sont guidées par les problèmes concrets. La seconde permet, fait remarquer l'auteur, d'exprimer les deniers en sous (chercher combien de sous il y a dans une somme exprimée en deniers, sachant que 1 denier vaut 12 sous). Il est édifiant de citer en comparaison la définition vague de Jehan Certain dans le *Kadran aux marchans* : « partir n'est autre chose que faire d'une somme plusieurs » (fol.15v-a).

Quant aux techniques, elles sont simplement énoncées sans justifications, même lorsque celles-ci peuvent se concevoir simplement, comme dans le cas de l'addition ou de la soustraction des nombres rompus. Notons tout de même que, si certaines pratiques relèvent du tâtonnement, un mathématicien comme Barthélemy utilise l'algorithme d'Euclide, parfaitement énoncé, pour chercher le PGCD de deux nombres afin de simplifier les fractions[21].

Les propriétés des opérations sont toujours sous-entendues, et aucun lien relatif à des structures communes n'est évoqué. Il ne s'agit pas tant de définir des opérations que d'opérer sur des nombres et la part primordiale de l'action sur le concept se ressent dans la préférence donnée au verbe par rapport au nom. On parle davantage d'ajouter ou de multiplier que d'addition ou de multiplication et les verbes d'origine vulgaire comme *lever* ou *partir* sont préférés aux verbes savants *soustraire* et *diviser*. Il n'y a guère que dans le Manuscrit de Pamiers que le caractère inverse de la soustraction et de la division par rapport à l'addition et la multiplication est mis en valeur. Ces opérations s'appliquent aux entiers puis aux fractions. Le cas des racines est plus complexe.

Nombres rompus et classification des nombres

Pourquoi les nombres rompus sont-ils indispensables ? Parce qu'ils sont utiles au commerce et à bien d'autres choses, nous dit l'auteur du manuscrit de Pamiers : « lo qual es necessari diversas de vegadas affer rasons de mercadaries et de diversas autras causas »[22] (fol. 51). En l'absence d'écriture décimale, toute opération de partage d'entiers génère des fractions. Nombres entiers et nombres rompus sont intimement associés dans le calcul du commerce ce qui fait que leur statut, même s'il n'est pas explicité, est sensiblement le même. Le nombre rompu n'a cependant pas la perfection de l'entier : « Nombre rout est un nombre qui n'est ne parfait ne entier de lui mesmes mais prent sa denominassion d'un aultre nombre »[23]. Et dans l'*Arithmeticque* de Nantes, on lit de même : « Et est dict et nommé ce numbre rout pour ce qu'il n'a perfection ne raison de nombre entier » (fol. 29). Comment est présenté le nombre rompu ? On trouve deux définitions. Dans la première et la plus courante, il provient, comme son nom l'indique, du partage d'un nombre donné en parties et correspond au choix d'un certain nombre de parties. Préhoude écrit dans son *Traicté* (fol. 15) : « Nombre rompu est une partie ou plusieurs de 1 entier ». La deuxième

[20] « Diviser, c'est chercher un nombre qui est contenu entièrement dans le nombre qui se divise autant de fois qu'il y a d'unités dans le nombre qui est diviseur. Et la seconde définition est : diviser un nombre, < c'est chercher un nombre > qui montre combien de fois le diviseur est contenu entièrement dans le nombre qui se divise ».
[21] Compendy de la praticque des nombres, fol. 163v.
[22] « lequel est nécessaire de diverses façons pour faire les calculs de marchandises et de diverses autres choses ».
[23] *L'art d'arismeticque*, fol. 39.

définition est de fondement différent puisqu'elle suppose la divisibilité de l'unité : « Nombre rout est une partie ou plusieurs de 1 » écrit Nicolas Chuquet dans le *Triparty en la science des nombres*[24] (fol. 10 ; p. 604). Les deux définitions mènent à la même représentation. Le nombre rompu est en effet composé de deux nombres entiers ; celui du haut, le numérateur, « nombre » les parties ; pour cette raison, il est aussi appelé « numbre numbrant » dans le manuscrit 456 de la médiathèque de Nantes (fol. 29). Le dénominateur est un entier car il signifie en combien de parties le nombre de départ est à diviser. En conséquence, le numérateur est nécessairement inférieur au dénominateur, « car s'il montoit autant que le denominateur, se seroit ung entier ; et s'il montoit plus, ce pourroit estre numbre entier ou entiers et rompu, car autant de fois que l'on peult prendre et lever le denominateur du numerateur, autant valent ilz d'entiers »[25]. Le nombre rompu est par définition inférieur à 1 et tout résultat fractionnaire où le numérateur est supérieur au dénominateur doit être mis sous la forme $a + \frac{p}{q}$ (noté $a\,\frac{p}{q}$), où $p < q$, sauf exceptions dues à des facilités de calcul. Barthélemy appelle cette opération « mettre en entiers »[26]. D'autres raisons plus pratiques, qui justifient cette écriture, seront exposées par la suite ; celle qui vient d'être évoquée est la conséquence même de la définition. C'est aussi, peut-être, un héritage de l'écriture des proportions dans la classification traditionnelle néo-pythagoricienne.

Ainsi, dans les arithmétiques marchandes, les classes de nombres ne sont plus fondées sur les couples d'opposition pair/impair, premier/composé, etc. Les nombres sont répartis en entiers, rompus et nombres « mixtes », sommes d'un entier et d'un rompu ; trois catégories issues des calculs concrets et considérées comme valeurs numériques plutôt que comme quantités abstraites[27]. Chuquet les nomme « différences », dans l'acception médiévale de « genres ». Parlant des solutions obtenues par règle de trois, il écrit dans le *Triparty* (fol. 28v ; p. 632) : « Et pourtant que les nombres de ceste rigle se pevent trouver en troys differences. Car aucunes foiz ilz sont entiers, aucunes foiz routz et aucunes foiz entiers et rouptz ensemble ». Cela n'empêche pas le mathématicien lyonnais, qui a toujours le souci des règles générales, de remarquer qu'un entier est un nombre rompu particulier : « Et combien que les nombres entiers n'ayent point de denominateur, toutefois convenablement et pour bailler rigles plus generales en ce traicté des routz l'on peut donner a tous nombres entiers 1 pour denominateur et par ainsi les nombres entiers seront denominez par 1 » (fol. 10 ; p. 604). Mais les opérations augmentent en complexité en présence de « nombres mixtes » et c'est pourquoi la classification précédente est toujours présente dans les applications numériques. Voici trois problèmes successifs posés par Chuquet dans le *Triparty* (fol. 18rv ; p. 615) :

---

[24] Le *Triparty en la science des nombres* a été édité par Aristide Marre. Les références au manuscrit sont suivies de celles de l'édition : A. Marre, « Le Triparty en la science des nombres par Maistre Nicolas Chuquet parisien, d'après le manuscrit fonds français, n° 1346 de la Bibliothèque Nationale », *Bullettino di bibliografia et di storia delle scienze matematiche e Fisiche* 13 (1880) : I, 593-659 ; II et III, 693-814.

[25] Ms 456, médiathèque de Nantes, fol. 29v.

[26] « Item, mettons en entiers $\frac{25}{6}$, valent $4\,\frac{1}{6}$ » (fol. 262v).

[27] Au sujet de nombres rompus et plus généralement de la conception du nombre à la fin du Moyen Age, voir A. Malet et J. Paradis, *Els or⊆gens i l'ensenyament de l'àlgebra simb◊lica (1478-1545)*, vol. 1, Barcelone, Publ. i ed. de la Universitat de Barcelona, 1984, ch. 9.

> Quel est le nombre que quant on en aura osté 17, la reste soit 19 ? Quel est le nombre que quant on en aura soustrait $\frac{3}{5}$, la reste soit $\frac{1}{8}$? Quel est le nombre que quant on en aura levé 13 $\frac{1}{3}$, la reste soit 5 $\frac{3}{7}$?

De même, pour entraîner aux opérations, Pellos donne toujours plusieurs règles et exemples qui combinent les différents cas, suivant que les nombres appartiennent à l'une des trois catégories précédentes. Pour calculer sur les nombres mixtes, plusieurs méthodes sont proposées ; on peut les réduire au préalable en fractions ou bien les conserver tels quels et utiliser les propriétés implicites des opérations : commutativité, associativité si l'on ajoute, distributivité de la multiplication sur l'addition si l'on multiplie.

Le lien entre proportion et nombre rompu

Une proportion au sens médiéval du terme est un rapport entre deux quantités homogènes, quelque chose comme « un regart et une convenience qui est entre deux quantitez semblans comparees l'une a l'autre »[28]. On cherchera par exemple quelle est la proportion de 8 à 12 : c'est celle de 2 à 3. Mais le maître d'algorisme dira aussi : 8 est les $\frac{2}{3}$ de 12. D'où le basculement du concept de « proportion » vers celui de nombre rompu, qui n'est plus un rapport, mais une valeur numérique sur laquelle on calcule au même titre qu'un entier, alors qu'un rapport ou une proportion est une relation[29]. Barthélemy de Romans aime poser des problèmes identiques en jouant uniquement sur le vocabulaire. Voici deux exercices successifs du *Compendy de la praticque des nombres* qui illustrent bien l'arithmétisation de l'idée de proportion (fol. 173) :

> Item, partiz 10 en troys parties, que la premiere soit a la seconde comme 1 a 2 et *iterum* la premiere soit a la tierce comme 3 a 4.

Item, partiz 10 en troys parties, que la premiere soit $\frac{2}{3}$ de la seconde et *iterum* la premiere soit $\frac{2}{5}$ de la tierce.

Chercher la « proportion » entre deux nombres rompus, relation qui n'est pas « visible » immédiatement, demande que l'on « réduise » au préalable les deux nombres. Réduire deux nombres rompus, c'est à l'origine les réduire au même dénominateur dans le but de découvrir la proportion qui est entre eux, qui sera celle des deux nouveaux numérateurs. « La reduction segunt nostre art de l'abaco, écrit Pellos, non es autre que las proporcions escondudas en los numbres rots »[30]. Barthélemy de Romans donne l'exemple suivant :

---

[28] Barthélemy de Romans, *Speculative des nombres*, fol. 274. Pour Boèce, une proportion est une « relation réciproque » : « Proportio est duorum terminorum ad se invicem quaedam habitudino », *Institution arithmétique*, op. cit. note 11, p. 140.

[29] Dans leur article sur la théorie des proportions dans l'Italie médiévale, Margherita Bartolozzi et Raffaella Franci notent les mêmes tendances : M. Bartolozzi et R. Franci, « La teoria delle proporzioni nella matematica dell'abaco da Leonardo Pisano a Luca Pacioli », *Bollettino di Storia delle Scienze Matematiche* 10 (1990), 3-28.

[30] « La réduction selon notre art de l'abaque n'est autre chose que la recherche des proportions cachées dans les nombres rompus » (*Compendion de lo abaco*, fol. 19).

« Quelle proportion est de $\frac{1}{2}$ à $\frac{1}{3}$? Reduiz la proportion qui est de 3 a 2, qui est proportion sexquialtera »[31].

La classification néo-pythagoricienne des proportions refait surface de temps à autre dans le *Compendy* de Barthélemy, par exemple au moment où l'auteur propose de résoudre des systèmes avec des coefficients de la forme $a + \frac{p}{q}$, ce qui est assez rare. C'est peut-être cette raison qui le pousse à faire une longue parenthèse sur les proportions grecques. Toutefois, ces remarques n'ont aucune incidence sur le fond et restent une simple démonstration d'érudition.

Les racines sont-elles des nombres ?

La permanence d'une dimension maximale égale à trois limite la recherche des racines à celles qui sont carrées ou cubiques[32]. La recherche des racines, lorsqu'elle est jugée utile, vient toujours en dernier lieu. Le travail essentiel se fait sur les nombres entiers car pour les fractions, la règle $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ ramène aux calculs sur les entiers. A quelques exceptions près, dont il a été question plus haut, les auteurs entrent de suite dans le vif du sujet : définir les carrés et cubes parfaits puis apprendre à extraire une racine approchée. Le résultat donné est, soit la racine entière, soit une approximation rationnelle sous forme de la somme d'un nombre entier et d'une fraction inférieure à 1. Il existe d'ailleurs dans certaines arithmétiques des méthodes très judicieuses qui permettent d'affiner les approximations[33]. Le travail sur les racines carrées et cubiques consiste donc à remplacer une racine par une valeur approchée qui appartient au domaine des nombres entiers et rompus. Le *summum* est d'approcher au mieux la valeur exacte, même si Chuquet prétend que l'extraction des racines carrées « imparfaites » « n'est que labeur sans utilite » (fol. 52 ; p. 697). Il est difficile de dire que les quantités irrationnelles sont considérées comme des nombres, dans la mesure où on n'opère pas sur elles. D'une part, on en cherche des valeurs approchées rationnelles ; d'autre part les problèmes traités sont quasiment tous du premier degré, et les données choisies dans Q : les solutions ne font donc pas émerger des irrationnels.

L'exception à cette unité est le *Triparty en la science des nombres* de Nicolas Chuquet. L'ouvrage est intégré aux arithmétiques commerciales pour plusieurs raisons. D'abord, la forme de la première partie est celle des algorismes méridionaux. Elle est très influencée par le *Traicté de la praticque des nombres* de Préhoude et par le *Compendy de la praticque des nombres* de Barthélemy-Préhoude, au point de les reprendre mot pour mot sur de longs passages[34]. En second lieu, Chuquet a adjoint en annexe à son *Triparty* une application à la pratique commerciale intitulée : « Comment la science des nombres peult s'applicquer au

---

[31] *Compendy de la praticque des nombres*, fol. 154v. La proportion sesquialtère correspond au rapport $1 + \frac{1}{2}$.

[32] Il faut cependant mentionner une exception d'importance, dans l'œuvre de Chuquet, dont il sera question plus loin.

[33] Manuscrit de Pamiers, fol. 66v-72 ; M. Préhoude, *Traicté de la praticque d'algorisme*, fol. 133-140 ; Barthélemy de Romans, M. Préhoude, *Compendy de la praticque des nombres*, fol.164v-165v ; N. Chuquet, *Triparty en la science des nombres*, fol. 52r-54v. Voir à ce sujet J. Sesiano, « On an algorism for the approximation of surds from a provencal treatise », in C. Hay (éd.), *Mathematics from Manuscript to Print* : *1300-1600*, Oxford, Clarendon Press, 1988 ; M. Spiesser, op. cit. note 18, tome 1, p. 73-74.

[34] Voir J. Cassinet, « Le manuscrit XXVI de Cesena, important maillon occitan de transmission de l'algorisme au XV^{e} siècle », *Bollettino di storia delle scienze matematiche*, 13 (1993), 251-285, p. 258-260. Chuquet cite à deux reprises Barthélemy de Romans.

fait de marchandise »[35]. En revanche, dans le corps du texte, le nombre est toujours pur, débarrassé de toute unité de mesure, même dans la première partie. La seconde partie est un traité sur les racines. Un chapitre est consacré aux méthodes pratiques d'extraction des racines ; les autres traitent du problème de manière beaucoup plus générale et plus large. Aucune limitation de dimension n'est imposée ; Chuquet transgresse les problèmes de dimension en définissant les racines d'ordre quelconque, objets mathématiques qui appartiennent au domaine du nombre (fol. 45v ; p. 654) : « Racine de nombre est ung nombre qui multiplié en soy une foiz ou plusieurs selon l'exigence et nature de la racine produyt precisement le nombre dont il est racine ».

Il consacre ensuite la majeure partie du livre sur les racines aux opérations sur les expressions de la forme $\sqrt[p]{a} \pm \sqrt[q]{b}$.

Chuquet s'est beaucoup inspiré des maîtres d'algorisme, dont il a dû faire partie à Lyon. Cependant, si son œuvre est sa propre création, il a réussi à s'échapper du contexte concret pour bâtir un traité théorique, où l'on voit le domaine du nombre prendre explicitement de l'ampleur. Le versant concret du commerce est alors traité au titre d'application. Le *Triparty* dépasse de loin toutes les autres productions de cette époque. C'est un texte original qui ne représente pas le courant des algorismes qui s'est développé en France au XVe siècle. Pour tous les traités qui entrent à part entière dans ce courant, aucun travail théorique n'est engagé sur les irrationnels.

III. LE NOMBRE DANS LA RESOLUTION DES PROBLEMES

Les problèmes qui font suite aux techniques opératoires se situent bien sûr dans le champ numérique qui vient d'être décrit. Ce sont d'abord des applications au commerce : calculs de mesures dans des exemples d'achat et de vente de marchandises, change, troc, intérêts, toutes ces questions sont régies par la règle de trois. Partant de nombres entiers ou fractionnaires, les résultats ne sortent donc pas de ce domaine. Ils expriment une solution concrète ; c'est un argument de poids en faveur de l'écriture $a + \frac{p}{q}$ au détriment d'un résultat fractionnaire quelconque. Il est beaucoup plus parlant de savoir que l'on doit à un homme 137 francs $\frac{3}{5}$ plutôt que $\frac{688}{5}$ francs.

La règle de trois est l'expression commune de la proportionnalité appliquée au domaine pratique du commerce. Les liens entre les deux sont-ils encore explicités ?

La règle de trois, la proportionnalité et la question de l'homogénéité

Comme son nom l'indique, la règle de trois (simple) met en jeu trois nombres ; le premier et le troisième expriment des quantités de même nature : un prix, une mesure de longueur, une surface, etc. ; ils sont « semblables » ou « semblants ». Le second leur est « dissemblant » ou « contraire » et le nombre cherché est de même nature que lui. Préhoude, dans son *Traicté de la praticque d'algorisme* décrit ainsi la règle (fol. 33) :

> Ceste regle est appelee regle de troys pour ce que es raisons qui se font par ceste regle sont tousjours requis troys nombres desquelz le premier et le tiers doivent tousjours estre semblants en nombrant une

[35] Un appendice composé de trois textes suit le *Triparty*. Le premier est une série de problèmes résolus le plus souvent algébriquement en application de la troisième partie du traité : « S'ensuyvent plusieurs autres Invencions de nombres en general lesquelz par la Rigle des premiers se treuvent ». Les énoncés et solutions des problèmes sont reproduits par A. Marre dans : « Appendice au Triparty en la science des nombres de Nicolas Chuquet parisien », *Bullettino di bibliografia et di storia delle scienze matematiche e Fisiche* 14 (1881), 413-460.

> chose. Et d'iceulx troys nombres en resulte ung autre qui est la raison et conclusion de ce que l'on veult savoir et est tousjours semblable au second nombre des troys. Ceste regle selon aucuns est appellee regle doree et selon autres regle des proportions.

Pour calculer le quatrième nombre, voici l'instruction : « multiplie ce que veulx savoir par son contraire et puis partiz par son semblant, ou multiplie le tiers nombre par le second et puis partiz par le premier »[36]. Par exemple,

> Si 4L. parisis valent 5L. tournois, que vauldront 138L. parisis ? Multipliés 138L. parisis, derrain numbre que voulés savoir, et 5L. tournois, moyen numbre son contraire, et divisés par 4, premier numbre son semblant, et en vient 172 livres et demie[37].

Dans sa définition, Préhoude met de suite la règle de trois en relation avec les proportions, toujours au sens de rapports. Dans la *Speculative des nombres*, Barthélemy explique cette relation qu'il tait dans son ouvrage de pratique. Tous les calculs nécessaires à la recherche du quatrième nombre peuvent se faire de deux manières (fol. 286v) :

> La premiere, que l'on doit regarder quelle proportion est entre les deux premiers nombres. Et selon celle proportion, que l'on donne au tiers son nombre proportional […]. La seconde que l'on doit regarder est quelle proportion entre le premier nombre et le tiers auquel on veult donner son nombre proportional. Et selon celle proportion l'on doit donner son nombre proportional au second ».

Soit a, b, c les trois nombres connus et x l'inconnue. Les quantités a et c d'une part, b et x d'autre part, sont de même genre. Appliquer la règle de trois, c'est trouver la quatrième proportionnelle. Mais regarder quelle proportion existe entre a et b, comme le propose la première méthode de Barthélemy, c'est établir un rapport entre deux quantités non « homogènes » ; dans la seconde méthode, les rapports sont au contraire entre quantités de même nature. L'exemple qui illustre la règle ne met pas ce problème en évidence car il porte sur des nombres entiers abstraits: « Si 4 valent 7, que valent 12 ? ». Ce n'est pas le cas dans l'application courante de la règle de trois qui met en jeu des quantités concrètes. Plus loin, Barthélemy ajoute : « Par quoy s'ensuit tousjours que la multiplication des deux nombres moyens est égale à la multiplication qui vient du premier contre le dernier ». Théorème fondamental qu'Euclide réservait aux livres arithmétiques (proposition VII-19) ou à quatre grandeurs homogènes de dimension 1 (proposition VI-17).

On voit donc que l'homogénéité des termes n'est plus une condition nécessaire à la possibilité de certains calculs. Une fois choisie une unité pour chaque couple de grandeurs de même nature, le calcul est transporté dans le domaine du nombre abstrait. Pourtant, des hommes comme Barthélemy montrent quelque réticence. Il note, au cours de la résolution d'un problème (*Compendy*, fol. 264) :

> Et est bien de noter que, en chascune de ces deux multiplications premieres, que par la multiplication l'on adjouste[38] deux nombres divers et dissemblables, comme es compaignies l'on adjouste le nombre des monnoyes avec le nombre du temps, multipliant le ung par l'autre ; et en la regle de troys composee, par la multiplication l'on adjouste la monnoye avec le temps et le poys et la mesure.

Les commentaires s'arrêtent là. C'est Chuquet qui fait le lien complet entre règle de trois, proportionnalité et division des nombres (fol. 28 ; p. 632) :

> La rigle de troys est ainsi appellee pour ce qu'elle requiert tousjours troys nombres desquelz les deux premiers sont tousjours constituez en certaine proporcion et en telle proporcion que sont etabliz, ceste rigle sert pour trouver au tiers nombre son quart a luy proportioné ainsi que est le second au premier. Non pas que necessairement les quatre nombres ne les troys soient proporcionalz ou constituez en une proporcion, mais telle habitude[39] qu'il y a du premier au second, icelle doit estre du tiers au quart. Et

---

[36] *Traicté de la praticque d'algorisme*, fol. 33.
[37] *Arithmeticque*, médiathèque de Nantes, ms 456, fol. 48.
[38] Il faut comprendre « l'on multiplie ».
[39] Habitude, au sens du bas latin *habitudo*, signifie rapport, relation.

> sont tousjours le premier et le tiers semblans et d'une condicion et le second et le quart entre eulx deux sont semblans et d'une nature et dissemblans et contraires aux aultres deux. Et qui multiplie le premier par le quart et le second par le tiers, les deux multiplications sont egales. Ainsi qui partyt l'ung semblant par l'autre et l'ung dissemblant par l'autre, les deux quociens sont egaulx .

En conclusion, même les auteurs qui explicitent la règle de trois en termes de rapports et de proportions passent sur les restrictions dues à la nature des grandeurs en cause. Cette règle, qui est utilisée sans cesse dans la résolution des problèmes pratiques, a contribué à évacuer peu à peu des esprits la contrainte grecque de l'homogénéité.

La règle de trois ne sert pas uniquement à résoudre des problèmes qui appartiennent au quotidien des marchands. Les arithmétiques commerciales véhiculent une riche tradition de problèmes d'origines diverses et souvent anciennes. Ce ne sont plus des questions qui visent le commerce, même si les énoncés peuvent le laisser croire. Dans les traités français, ces problèmes sont presque toujours linéaires. Mais si aucun radical ne peut apparaître lors de la résolution, la solution ou les calculs intermédiaires ne sont pas à l'abri des quantités négatives ou nulles.

Zéro et les nombres négatifs dans la résolution des problèmes

Léonard de Pise avait déjà, dans le *Liber abbaci* et dans le *Flos*[40], soulevé la question des solutions négatives lors de la résolution de problèmes pseudo concrets[41]. La réponse était invariablement la même : le problème n'a pas de solution, sauf si l'on interprète le résultat comme une dette (il s'agissait de trouver des sommes d'argent). L'un de ces types de problèmes à solution négative est repris par l'auteur du Manuscrit de Pamiers[42]. Comme ce texte est fondateur de la tradition méridionale française des arithmétiques commerciales, on retrouve exactement le même exercice dans quelques traités ultérieurs. Cependant, des auteurs qui traitent tous les autres problèmes du même genre figurant dans le manuscrit de Pamiers ignorent celui-ci, preuve de leur réticence envers les quantités négatives, voire de leur incompréhension. L'intérêt du traité de Pamiers est d'accepter le résultat négatif uniquement sur des critères mathématiques –les solutions vérifient les données du problème– alors que, dans le contexte de l'exemple, une interprétation en termes de dette, à la manière de Fibonacci, pouvait venir naturellement sous le sens. C'est, à notre connaissance, le premier ouvrage qui accepte sans restriction une solution négative[43]. L'expression précédente est d'ailleurs bien mal adaptée et anachronique. Car il ne s'agit pas de nombres négatifs, mais de nombres « moins que rien ».

C'est à partir du même exemple que l'auteur du *Compendy de la praticque des nombres*, dans un souci pédagogique, veut expliquer le sens des solutions dites *meins de riens*. Le trouble qu'elles provoquent se mesure au nombre important de notes et de pages qui leur sont consacrées[44], à la confusion des discussions sur leur influence dans les calculs. D'un autre côté, l'attitude de Barthélemy est très pionnière. De même que dans le manuscrit de

---

[40] Léonard de Pise, *Flos*, Milan, Bibliothèque Ambrosiana, ms E. 75 P. Edité par B. Boncompagni, *Tre Scritti inediti di Leonardo Pisano*, Tipografia galileiana, Florence, 1854, p. 1-53 et traduit et commenté par E. Picutti, « Il Flos di Leonardo Pisano », *Physis* 25 (1983), 293-387.

[41] Il s'agit par exemple d'achat de marchandise entre plusieurs personnes. Ce sont toujours des problèmes qui se traduisent par des systèmes linéaires. J. Sesiano les a répertoriés dans « The Appearance of Negative Solutions in Medieval Mathematics », *Archive for History of Exact Sciences*, vol. 32-2 (1985), 105-150.

[42] Cinq hommes achètent une pièce de drap et aucun n'a la somme nécessaire pour la payer. Si le premier demande aux autres la moitié de leur argent, il pourra payer le tissu. De même le second, le troisième, le quatrième et le cinquième demandent tour à tour le tiers, le quart, le cinquième et le sixième de l'argent des autres. On trouve comme solution – $(10 + \frac{3}{4})$ pour le premier et des résultats positifs pour les quatre suivants (Manuscrit de Pamiers, fol. 101rv).

[43] Voir J. Sesiano, « The appearance of … », op. cit. note 41, p. 133.

[44] fol. 219v-223 et fol. 232v-233v.

Pamiers, aucune interprétation d'une solution négative n'est faite. Qui plus est, et le *Compendy* va maintenant beaucoup plus loin, l'auteur envisage et classe les différentes éventualités à l'issue d'un problème, par rapport à la nature de chaque solution (positive, nulle ou négative). Il commente longuement des résultats qui sont le plus souvent rejetés sans autre procès (fol. 219v, traduction en français moderne) :

> […] ce qui reste lorsqu'on soustrait des nombres plus petits s'appelle nombre déterminé, quand on soustrait un nombre égal, il reste 0, qui s'appelle non rien simplement, et quand on devrait soustraire des nombres plus grands, comme il est impossible de retrancher le plus grand nombre du plus petit, la soustraction se fait forcément en sens contraire et pour cela, ce qui reste s'appelle moins que rien[45].

Les lignes précédentes montrent en même temps que, si l'auteur parle de ces quantités en tant que nombres (ils entrent dans des calculs comme les entiers naturels ou les fractions), le nombre demeure la valeur absolue et « moins que rien » est un qualificatif.

Zéro semble en revanche vraiment intégré dans le domaine des nombres au niveau des calculs intermédiaires dans les résolutions de problèmes. A titre d'exemple, une classe de problèmes de partage, déjà mentionnée sous le nom de « progressions composées »[46], est étudiée de manière générale et la résolution organisée à l'aide de figures qui permettent d'effectuer mécaniquement les calculs pour chaque application numérique. Dans l'exemple qui suit, une progression est donnée de premier terme a et de raison r, ainsi qu'une fraction $\frac{p}{q}$. On doit calculer la somme $(q-p)a + (r-a)q$ (le « nombre commun ») dans le cas où $r = a = 3$, $q - p = 8$ et $q = 11$. Les nombres $q - p$ et a sont placés à gauche dans la figure, $r - a$ et q à droite. Le texte dit (fol. 259) :

> Regarde de quoy est meins 3 en quoy encommence la progression que 3 qui fait la progression, de 0 que doiz mettre au cousté dextre a bas dessoubz les 11. Ores, pour trouver le nombre comun, multiplie ces deux coustez, monte le senestre 24 et le dextre monte 0 ; adjouste 24 et 0, sont 24.

Dans les calculs issus de ces problèmes, l'auteur ne fait à aucun moment de différence entre 0 et les autres nombres, entiers ou rompus.

Chuquet, qui connaît bien le *Compendy*, poursuit dans la même voie. J. Sesiano note que neuf problèmes du *Triparty* ou de l'appendice conduisent à une solution négative ou nulle, quelques-uns dans un contexte numérique abstrait, d'autres sous une interprétation concrète. Les quatre premiers, dans le livre 1 du *Triparty*, sont du même genre que le problème de la pièce de drap du Manuscrit de Pamiers. Chuquet a puisé une bonne partie de ses énoncés dans le traité de Préhoude et dans le *Compendy de la praticque des nombres*. Voici quelques exemples significatifs. Le premier conduit à un système linéaire de cinq équations à cinq inconnues. Après avoir déterminé les trois premières d'entre elles, Chuquet poursuit (fol.35 ; p. 641) :

Encores de 300 je soustraiz 300 et reste 0 pour le quart nombre. Encores plus, je lyeve 360 de 300 et pour tant que l'on ne peult, fault faire par le contraire, c'est assavoir de 360 oster 300. Et reste moins 60 pour le quint nombre.

On reconnaît le style du *Compendy* dans les problèmes identiques, même si Chuquet a préféré la formulation nouvelle « moins 60 » à la tournure « 60 meins de riens » de Barthélemy-Préhoude. Chuquet précise ensuite le comportement de 0 et des quantités négatives dans les opérations et finit par interpréter un « moins » comme une dette (fol. 35v ; p. 641-642) :

---

[45] « Et est que ce que reste en la sustraction des meindres se appelle nombre determiné. Et quant le egal se sustrait, que se appelle non riens simplement. Et quant les plus grands se deveroient sustraire, car il est impossible que le plus grand nombre se lieve du meindre, il est forcé que la sustraction se face par le contraire ; et pour ce est que ce que reste se appelle meins de riens ».

[46] Voir la note 18.

> Pour les choses dessusdictes entendre et esprouver, l'on doit savoir que qui adjouste ou soustrait 0 avec aulcun nombre, l'addicion ou soustraction ne augmente, ne diminue. Et qui adjouste un moins avec ung aultre nombre ou qui d'icellui le soustrayt, l'addicion se diminue et la soustraction croist. […] Et quand l'on dit moins 4, c'est comme si une personne n'avoit riens et qu'il deust encores 4. Et quant on dit 0, c'est rien simplement.

Dans les pages où Chuquet applique son algèbre, quelques problèmes se réduisent à une équation du premier degré ($ax = b$) dans laquelle l'un des deux coefficients est négatif. L'attitude du mathématicien est alors variable. Au feuillet 104v du *Triparty* (p. 762), dans une « note sur les raisons impossibles », il parvient à l'équation :

$$9\,\frac{7}{10} = -11x$$

et conclut : « Et pour tant que le partiteur est moins, c'est signe que ce calcule est impossible ». Dans l'appendice, pour un problème de vente de pommes et de poires, il accepte au contraire la même situation (fol. 160r) : « Et 0 m 1 denier $\frac{13}{14}$ de denier a employé en pommes et en a eu 0 m 15 pommes $\frac{3}{7}$ qui a s'entendre comme devant est dit valent 0 m 1 denier $\frac{5}{7}$ »[47], ceci sans autre commentaire même si, quelques pages auparavant, il faisait remarquer que « toutesfoiz il semble selon l'usage commun que telles raisons comme cestes sont impossibles » (fol. 157).

Le comportement de Chuquet vis-à-vis des quantités négatives est encore mal fixé. Le mathématicien est ballotté entre plusieurs choix : reconnaissance mathématique, refus, acceptation moyennant des interprétations, et ces attitudes ne dépendent même pas du style du problème, c'est-à-dire de son caractère concret ou non. Cependant, on voit se dessiner une évolution nette depuis le Manuscrit de Pamiers. Le problème de l'achat de la pièce de drap a certainement frappé les esprits par l'absence d'une interprétation concrète et naturelle. Chuquet, on l'a vu, s'est en partie formé en étudiant les traités d'algorisme. Il a rencontré les problèmes à solutions négatives dans le *Compendy de la praticque des nombres*. Mais il a dépassé ses sources en intégrant les nombres négatifs, non seulement en arithmétique, mais aussi dans son algèbre et dans ses notations des puissances.

CONCLUSION

Les arithmétiques commerciales n'ont pas la réputation d'avoir été des lieux de création et on leur reconnaît surtout d'avoir participé à la transmission de traditions, mais aussi de nouvelles idées et techniques. Ainsi, les traités italiens ont joué un rôle fondamental dans la diffusion de l'algèbre arabe. Les arithmétiques françaises dont il vient d'être question ont eu une part beaucoup plus modeste dans l'évolution des mathématiques. C'est une part qu'il ne faut cependant pas mépriser. Centrés sur la pratique, les algorismes marchands ont délaissé le côté conceptuel pour l'aspect opératoire. Cela leur a permis de sortir des contraintes théoriques de la mathématique euclidienne et de rompre en même temps avec le cadre sclérosé de l'arithmétique spéculative telle que Boèce l'avait transmise. Leurs auteurs ont poursuivi dans la voie ouverte par les Arabes en mettant à profit la puissance du système positionnel et du calcul légués à l'Europe dès les XII^{e}-XIII^{e} siècles.

---

[47] Le marchand a dépensé $0 - 1\,\frac{13}{4}$ d et a eu $0 - 15$ pommes $\frac{3}{7}$ qui valent $0 - 1\,\frac{5}{7}$ d.

Même si certains maîtres d'algorisme appartiennent au milieu lettré et maintiennent dans leurs ouvrages une tradition savante, les liens qu'ils établissent entre les domaines théorique et pratique contribuent à tirer des concepts comme ceux de rapport (proportion) et de proportionnalité vers le numérique. Le champ des nombres, grâce à l'extension du calcul dans les pratiques mercantiles, s'est élargi et les nouveaux points de vue ont dépassé les frontières du milieu professionnel marchand. En tant qu'objets des mêmes calculs, les nombres sont répartis en trois classes : entiers, rompus et « mixtes ». Les radicaux ne sont pas rejetés mais ne concernent pas les calculs du commerce ; il faudrait voir ce qu'il en est du côté des géométries pratiques, souvent adjointes aux arithmétiques. Quant aux quantités négatives, produits des « cas pathologiques » dans les problèmes, c'est peut-être la véritable « avancée » mathématique des arithmétiques françaises. Mais leur impact au siècle suivant sera faible car, en dehors de celui de Pellos, aucun texte n'a été imprimé. Excepté ce qui touche aux nombres négatifs, les nouvelles conceptions seront surtout relayées par les ouvrages italiens et aussi allemands.

REFERENCES

1. Anonyme, *Compendi del art del algorisme*, (dit « manuscrit de Pamiers »), c. 1420-1430
   Occitan, Bibliothèque Nationale de France (ms fds fr. 4140)
2. Anonyme, *L'art d'arismetique*, c. 1460
   Français - Bibliothèque nationale de France (ms fds fr. 2050)
3. Mathieu Préhoude, *Traicté de la praticque d'algorisme*, Lyon, avant 1471
   Français, Cesena, Bibliothèque Malatestiana (ms S-XXVI-6, fol. 7 à fol. 140v)
4. Barthélemy de Romans et Mathieu Préhoude, *Compendy de la praticque des nombres*, Lyon, 1471
   Français, Cesena, Bibliothèque Malatestiana (ms S-XXVI-6, fol. 149 à fol. 268v)
   Edition : M. Spiesser, *Entre théorie et pratique : le* Compendy de la praticque des *nombres de Barthélemy de Romans et Mathieu Préhoude (1471)*. *Aspects mathématiques, linguistiques et culturels*, thèse de l'E.H.E.S.S., Paris, 1999.
5. Nicolas Chuquet, *Triparty en la science des nombres*, 1484
   Le *Triparty*, fol. 2 à fol. 147
   Appendices au *Triparty* :
   S'ensuyvent plusieurs autres Invencions de nombres en general lesquelz par la Rigle des premiers se treuvent, fol. 148 à fol. 210
   Commant la science des nombres se peult appliquer aux mesures de geometrie, fol. 211 à fol. 262
   Commant la science des nombres peut se appliquer au fait de marchandise, fol.264 à fol.324
   Français - Bibliothèque nationale de France (ms fds fr. 1346)
   Edition : A. Marre, Le *Triparty en la science des nombres* de Maistre Nicolas Chuquet parisien, …, *Bullettino di bibliografia et di storia delle scienze matematiche e fisiche* 13 (1880) I, p. 593-659 ; II et III, p. 693-814.
   A. Marre, « Appendice au *Triparty en la science des nombres* de Maistre Nicolas Chuquet parisien » (énoncés et résultats seulement), *Bullettino di bibliografia et di storia delle scienze matematiche e fisiche* 14 (1881), p. 413-460.
6. Jehan Certain, *Le Kadran aux marchans*, Bilbao et Marseille, 1485
   Français - Bibliothèque de l'Arsenal, Paris (ms 2904)
7. Anonyme, *Arithmeticque*, 1488
   Français - Médiathèque de Nantes (ms 456)
   Edition : R. Duhil, *Etude d'un traité d'arithmétique du XVe siècle : le manuscrit 456 de Nantes*, Mémoire de maîtrise, Université Paris XIII, 1997.
   Cette arithmétique a été écrite dans le Nord de la France, mais elle est inspirée des arithmétiques du Midi.
8. Frances Pellos, *Compendion de lo abaco*, Turin, 1492 (date d'impression)
   Occitan - Imprimé à Turin

Edition : R. Lafont et G. Tournerie, *Frances Pellos, Compendion de lo abaco*, Montpellier, éd. de la Revue des Langues romanes, 1967.
N.B. : Une arithmétique imprimée en catalan de la même époque a de nombreux points communs avec les ouvrages précédents. Il s'agit de :
Francesc Sanct Climent, *Suma de la art de aresmetica*, Barcelone, 1482
Catalan - Imprimé à Barcelone
Edition : A. Malet, *Summa de l'art d'aritmetica, Francesc SantclimentI, Vic, Eumo Editorial, 1998.*
Traduction française : M. H. Labarthe, *La* Suma de la art de arismetica *de Francesch Sanct Climent*, D.E.A. Histoire des sciences, Université Paris I, 1999.