LA TRADITION ARITHMETIQUE EN MUSIQUE

L'EXEMPLE DE GASSENDI

Brigitte VAN WYMEERSCH (Louvain)

Les traités de théorie musicale regorgent de notions arithmétiques. Elles concernent un problème fondamental en musique : la fixation des hauteurs sonores. Dès l'Antiquité, celles-ci sont calculées sur base de la division du monocorde : à chaque intervalle correspond un rapport numérique. Au XVII^{e} siècle, la question se complexifie en raison notamment des recherches menées sur l'accord des instruments à sons fixes. La mise au point de différents tempéraments et leur appréciation suscitent des débats importants, et de nombreux savants se font fort d'apporter leur pierre à l'édifice. Certains se rangent du côté de la tradition, d'autres au contraire proposent des solutions mathématiques ou physiques nouvelles.

Un texte écrit par Gassendi et conçu comme une « introduction à la théorie musicale » est une parfaite illustration des quelques débats mathématico-musicaux qui ont cours en ce siècle. Tout en restant fidèle à la plus ancienne tradition arithmétique appliquée à la musique, il expose, mais sans s'y attarder, quelques solutions proposées par d'autres théoriciens et savants. Il est donc intéressant, à partir du texte de Gassendi, de s'ouvrir aux conceptions des 'Anciens', mais aussi de comprendre les apports des contemporains du prévôt de Digne.

GASSENDI : LE PEDAGOGUE FIDELE

Gassendi écrit vers 1636 un petit traité de musique, la *Manuductio ad theoriam seu partem speculativam musicæ* [1], dont la première édition date de 1655[2]. Dans cette *introduction* à *la théorie ou à la partie spéculative de la musique*, Gassendi se révèle un

[1] Petri Gassendi... *Miscellanea*, V. *Manuductio ad theoriam musicæ*, tomus quintus, Lugduni, L. Anisson et J. B. Devenet, 1658, p. 631-658. Facsimile-Neudruck der Ausgabe von Lyon 1658, Bd 5, Stuttgart-Bad Cannstadt, Friedrich Frommann Verlag, 1964. G. Guieu en a réalisé une traduction française. Cependant, elle contient de nombreuses imprécisions et quelques erreurs, nous ne la suivrons pas systématiquement (Pierre Gassendi, *Initiation à la théorie de la musique*, *Texte de la Manuductio*, traduit et annoté par Gaston Guieu, Aix-en-Provence, Edisud, 1992).

[2] Bougerel, dans sa *Vie de Gassendi*, parle d'une première édition en 1655. Cependant ce traité fut composé "long-temps auparavant pour en faire présent à un musicien d'Aix de ses amis, nommé Barbesieux" (Bougerel, *Vie de Pierre Gassendi. Prevôt de l'Eglise de Digne et professeur de mathematiques au College Royal*, Paris, Jacques Vincent, 1737, p. 406, cité par G. Guieu, *préface*, p. 5).

pédagogue respectueux des acquis antérieurs. Il y expose le système musical des Anciens, les conceptions plus récentes, et accessoirement ses propres solutions[3].

Ce court traité comporte quatre chapitres. Le premier est consacré aux rapports et progressions arithmétiques, éléments indispensables pour comprendre les notions exposées au deuxième chapitre, lequel présente le calcul des hauteurs sonores sur la base de la division du monocorde et le classement des sons en consonances et en dissonances. Le troisième chapitre concerne les trois « genres de musique », c'est-à-dire les trois systèmes diatonique, chromatique et enharmonique. Le système diatonique qui « procède par tons entiers »[4] est développé plus longuement « puisque nous chantons habituellement en diatonique »[5]. C'est sur base de ce dernier que se construit la théorie des modes, décrite au quatrième chapitre.

Dans sa *Manuductio,* Gassendi n'expose pas les règles de l'écriture musicale, mais l'organisation sonore de base sans laquelle le compositeur ne peut commencer son travail. Les chapitres les plus importants pour notre propos sont les deux premiers, à savoir l'exposé de la théorie des proportions (« De Proportionibus universè, & quatenus ad harmoniam conferunt ») et son application au calcul des différents intervalles (« De Consonantiis, earumque partibus ad suas proportiones relatis »).

Gassendi ne remet jamais en cause la relation étroite que la musique et les mathématiques entretiennent. La musique est une science quadriviale, et donc une science des nombres, mais à la différence de l'arithmétique, elle s'occupe non pas de nombres « nus », mais de nombres « chantants et harmonieux »[6], c'est-à-dire qu'elle n'étudie pas les nombres en soi, considérés dans leurs propriétés propres, telles que la parité, la divisibilité, mais s'intéresse aux relations entre ces nombres. Il s'agit là d'une conception tout à fait traditionnelle de la science musicale, héritée de la tradition platonicienne et transmise par Boèce à l'Occident chrétien. Dans ce cadre, l'étude de la musique constitue une étape supplémentaire dans la connaissance des nombres discrets.

Le chant procède des nombres, les nombres en sont la mesure[7]. Etudier l'univers des nombres est indispensable pour saisir le système musical, pour comprendre par exemple le pourquoi et le comment des consonances et des dissonances[8].

LA THEORIE DES PROPORTIONS DANS LA *MANUDUCTIO*

Gassendi reprend la théorie traditionnelle des proportions, celle que l'on retrouve chez Euclide, Nicomaque ou Boèce. D'emblée, il précise le vocabulaire et distingue la proportions simple (« proportio simplex ») proportion complexe (« proportio complexa »), qu'il nomme *ratio* et *proportio*, les correspondants grecs du *logos* et de l'*analogia* [9].

---

[3] Par exemple, lorsqu'il parle de la division du ton en demi-tons : « Ceci dit, comme les anciens ne connaissaient pas le ton mineur, ils divisaient, pour la plupart (...). Quant à nous, nous ne divisons pas la corde selon ces proportions. (...) Mais en vérité, le ton peut-être divisé en deux égalités (...) ». (Gassendi, *Initiation à la théorie de la musique,* trad. G. Guieu, p. 32).

[4] Gassendi, *Initiation à la théorie de la musique*, trad. G. Guieu, p. 43.

[5] Gassendi, *Initiation à la théorie de la musique*, trad. G. Guieu, p. 53.

[6] « Id Arithmeticae super-addens, ut numeros non nudos, sed canoros, & harmonicos spectet ; quae proinde est ipsi subiecta materies » (Gassendi, *Manuductio ad theoriam musicae*, p. 633).

[7] « Videlicet cantus ad numerum procedit, modulique numeri sunt » (Gassendi, *Manuductio ad theoriam musicae*, p. 633).

[8] « Le chant choral (..) pour être harmonieux, doit briller d'une proportion à suivre dans les nombres. Ce qu'il faut pour parler vraiment de la musique, et surtout quand il s'agit de la partie spéculative, c'est commencer par étudier ces proportions dont dépendent les consonances » (Gassendi, *Initiation à la théorie de la musique*, trad. G. Guieu, p. 13).

[9] Un certain flottement dans le vocabulaire existe depuis l'Antiquité. Pour remédier à la confusion introduite par Cicéron, qui avait donné au terme grec d'*analogia* le sens de *rapport,* Boèce utilise le terme *proportionalitas* pour désigner les 'proportions complexes', à savoir les véritables *analogiai*. Gassendi, en bon lecteur de l'Histoire, rend compte de cette

La proportion simple ou la *ratio* est une relation entre deux quantités du même genre[10]. Cette proportion peut être égale ou inégale, et l'inégalité peut être majeure ou mineure, selon que l'on compare la quantité supérieure avec la quantité inférieure, ou le contraire[11]. Les proportions inégales se répartissent en cinq espèces : multiple (« multipla »), superparticulière (« superparticularis »), superpartissante (« supartiens »), multiple de superparticulière (« multipla superparticularis »), multiple de superpartissante (« multipla superpartiens »), cinq types de rapports que l'on trouve dans les traités anciens[12].

Dans un rapport multiple, la plus grande quantité contient la plus petite un nombre précis de fois[13]. Cette proportion est dite double, triple, etc. selon que le terme le plus petit est contenu deux, trois fois, ou plus, dans le terme plus grand. Dans un rapport superparticulier ou superpartiel, la quantité la plus grande contient la plus petite une fois plus une partie aliquote[14]. Le nom de ces proportions provient de la partie aliquote à laquelle on ajoute le préfixe latin 'sesqui'. 3/2 est une proportion sequialtère : la partie aliquote par laquelle 3 dépasse 2 est un, c'est-à-dire est la moitié de deux.

Dans le cas d'un rapport superpartissant, la quantité la plus grande dépasse la plus petite d'une partie non aliquote d'elle-même[15]. On nomme ces proportions en fonction du nombre excédentaire. Le rapport 5/3 est nommé *superbipartiens tertias*, 8/5 *supertripartiens quintas*, etc.

Dans une fraction multiple superparticulière, la plus grande partie contient plusieurs fois la plus petite, plus une partie aliquote[16]. Leur dénomination est l'assemblage de la dénomination des multiples et des superparticulières. L'expression *dupla sesquialtera* désigne ainsi le rapport 5/2.

---

incertitude sémantique, comme il le fera encore plus tard dans son texte (Boèce, *Institution arithmétique*, Texte établi et traduit par Jean-Yves Guillaumin, Paris, Les Belles Lettres (Collection des Universités de France), 1995, note complémentaire 103, p. 215-216).

[10] « Aliud nihil est proportio simplex, seu ratio; quam relatio, seu habitudo duarum quantitatum generis eiusdem comparatarum inter se » (Gassendi, *Manuductio ad theoriam musicae*, p. 633).

[11] « Distinguitur autem proportio haec duplex, alia enim Æqualitatis, alia Inæqualitatis vocatur. Proportio æqualitatis est, quæ inter æquales versatur (...). Proportio inæqualitatis, quæ inter inæqualeis, idque seu comparemus quantitatem maiorem cum minore, (...) : quo casu proportio maioris inæqualitatis dicitur ; seu minorem cum maiore, (...) quo casu dicitur proportio minoris inæqualitatis » (Gassendi, *Manuductio ad theoriam musicae*, p. 633-634).

[12] La traduction française de ces termes latins n'est pas uniforme. Par exemple *superparticularis* est traduit par 'superpartiel' (J-Y Guillaumin, dans Boèce, *Institution arithmétique*, trad. de J.Y. Guillaumin) ou 'superparticulier' (G. Guieu, dans Gassendi, *Initiation à la théorie de la musique*, trad. G. Guieu de la *Manuductio... de Gassendi*). Pour le terme *superpartiens*, on trouve 'superpartient' (J.Y. Guillaumin) ou 'superpartissant' (G. Guieu).

[13] « cum quantitas maior continet minorem aliquot vicibus præciè, ut numerus 4. numerum 2. bis (....) » (Gassendi, *Manuductio ad theoriam musicae*..., p. 634).

[14] « Superparticularis, cum quantitas maior continet minorem semel, ac præterea eius aliquotam parte, ut numerus 3. numerum 2 (...) » (Gassendi, *Manuductio ad theoriam musicae*, p. 634). La définition de Boèce était assez similaire: « Un nombre est superpartiel toutes les fois que, comparé à un autre, il contient en lui-même ce nombre plus petit tout entier et une certaine partie de ce nombre. Si c'est la moitié, on le nomme sesquialtère; le tiers, sesquitierce ; le quart, sesquiquarte; (...) » (Boèce, *Institution arithmétique*, trad. de J.-Y. Guillaumin, p. 50).

[15] « Superpartiens, cum quantitas maior continet minorem semel, ac præterea ipsius non aliquotam partem, sive parteis quæ simul sumptæ non sunt pars aliquota ipsius, ut numerus 5. numerum 3. ille enim hunc continet semel, ac prætetrea duo, quæ non sunt pars aliquota trium » (Gassendi, *Manuductio ad theoriam musicae*, p. 634). Chez Boèce, nous trouvions : « Il y a relation superpartiente lorsqu'un nombre, comparé à un autre, contient en lui-même ce nombre tout entier et en plus, des parties de ce nombre : deux, trois, quatre, ou autant qu'il y en aura dans le rapport considéré » (Boèce, *Institution arithmétique*, trad. de J.Y. Guillaumin, p. 58).

[16] « Multipla Superparticularis, cum quantitas maior continet minorem multis vicibus, ac præterea unam aliquotam ipsius partem, ut numerus 5. numerum 2. ille enim hunc continet bis, ac præterea unitatem, quæ est pars duorum aliquota » (Gassendi, *Manuductio ad theoriam musicae*, p. 634).

Et enfin, dans un rapport multiple superpartissant, la plus grande quantité contient un certain nombre de fois la plus petite, plus une partie non aliquote[17]. La dénomination de ces proportions relève du même principe que pour les précédentes.

Les proportions d'inégalité mineure procèdent de façon inverse. Le préfixe « super » fait donc place au préfixe « sous » (« sub »). La proportion 2/4 est donc dite sous-double, 3/2 était sesquialtère, 2/3 sera sous-sequialtère, 5/3 était *superbipartiens tertia*, 3/5 sera *subbipartiens tertias*, etc.

Gassendi passe ensuite à un autre type de proportion, celle qu'il désignait au début de son chapitre par le terme d'analogie, ou de proportion complexe, et que Boèce nomme « proportionalité » (« proportionalitas »). Il en distingue trois : la proportion géométrique, arithmétique et harmonique.

La première se rencontre entre 4 nombres dont le premier est dans un même rapport avec le second que le troisième avec le quatrième. Si les deuxième et troisième termes sont différents, la proportion est disjointe (ex. : 2/4 et 5/10), si ils sont semblables, la proportion est conjointe (ex. : 2/4 et 4/8)[18].

On parle de proportion arithmétique lorsqu'il y a une différence égale entre les nombres. Elle est plus une progression par différence égale qu'une véritable proportion, nous dit Gassendi[19] .

Et enfin, la proportion harmonique se forme entre trois nombres disposés de telle sorte que le rapport entre le plus grand et le plus petit soit égal au rapport des différences du plus grand au moyen et du moyen au plus petit ($a < b < c : c - a = (c - b) / (b - a)$)[20].

Une quatrième proportion, la proportion dite antiharmonique, est envisagée à titre anecdotique, elle apparaît entre trois nombres disposés de telle sorte que la proportion entre le plus grand et le plus petit soit égale à la proportion entre les différences du plus petit au moyen et du moyen au plus grand tel 6 – 5 – 3[21].

---

[17] « Multipla superpartiens, cum quantitas maior continet minorem multis vicibus, ac præterea parteis aliquot ipsius, ut numerus 11. numerum 4. ille enim unc continet bis, ac præterea 3. quæ sunt pars non aliquota ipsius » (Gassendi, *Manuductio ad theoriam musicae*, p. 634).

[18] « Geometrica est, quæ versatur inter quatuor numeros, quorum primus ad secundum aedem se ratione, aut proportione habet, quâ tertius ad quartum » (Gassendi, *Manuductio ad theoriam musicae*, p. 635). Voici l'approche de Boèce : « Expliquons maintenant la médiété suivante, la géométrique, à laquelle seule convient – ou à laquelle convient le mieux – l'appellation de proportion, parce que l'on y considère les mêmes rapports entre les termes, que ce soit les plus grands ou les plus petits. Cette fois, en effet, le rapport demeure toujours égal et l'on ne tient pas compte de la quotité et de la pluralité du nombre, contrairement à ce qui se passait dans la médiété arithmétique » (Boèce, *Institution arithmétique*, trad. de J.Y. Guillaumin, p. 148).

[19] « Arithmetica est, quæ versatur inter treis, aut plureis numeros, qui differentia æquali procedunt. (...) Ex quibus licet intelligi proportionem Arithmeticam esse magis propriè progressionem quandam per æqualia, aut differentiarum æqualitatem, quàm proportionem » (Gassendi, *Manuductio ad theoriam musicae*, p. 635).

[20] « Harmonica est, quæ versatur inter treis numeros sic dispositos, ut quæ est proportio maximi ad minimum talis sit differentiæ maximi a medio, ad differentiam medij a minimo » (Gassendi, *Manuductio ad theoriam musicae*, p. 635). Boèce en donnait l'approche suivante : « La médiété harmonique est celle qui ne se constitue ni avec les mêmes différences ni avec des rapports égaux, mais dans laquelle la différence du grand terme et du moyen terme est à l'égard de la différence des moyen et petit termes dans le même rapport que le grand terme à l'égard du petit » (Boèce, *Institution arithmétique*, trad. de J.-Y. Guillaumin, p. 156).

[21] La mention de cette proportion est assez étrange, car elle n'est d'aucun usage en musique. Rappelons que les pythagoriciens connaissaient au total dix moyennes. Les plus utilisées sont les trois premières : les moyennes arithmétique, géométrique et harmonique.

Archytas les définit comme suit : « On parle de moyenne arithmétique quand trois termes entretiennent entre eux une proportion selon un excès donné et que l'excès du premier par rapport au deuxième est celui du deuxième par rapport au troisième (...). On parle de moyenne géométrique quand le rapport des trois termes est tel que le premier est au deuxième ce que le deuxième est au troisième (...). On parle de moyenne sub-contraire, celle que nous appelons harmonique, quand le rapport des trois termes est le suivant : le premier terme dépasse le deuxième une fraction de lui-même et le moyen dépasse le troisième de la même fraction du troisième » (Archytas, *Fragmente*, dans Diels-Kranz, *Fragmente der Vorsokratiker*, 47 B 2, trad. J.-P. Dumont, *Les présocratiques*, p. 535-536).

Gassendi aborde ensuite les opérations que l'on peut effectuer à partir des proportions. Il en distingue quatre : l'addition ou composition, la soustraction, la multiplication ou la continuation, et la division.

Par les termes d'addition et de soustraction de proportions, Gassendi désigne la multiplication ou la division des rapports entre eux. Ainsi pour obtenir la différence entre les rapports sesquialtère et sesquitierce, on doit diviser l'un par l'autre, ce qui donne le rapport sesquioctave. Cela peut sembler paradoxal, mais notre auteur se place très traditionnellement dans la perspective d'une application musicale : la sensation auditive est de type logarithmique, c'est-à-dire que l'on 'ajoute' sensiblement une quinte à une quarte pour avoir une octave, addition qui revient à une multiplication des rapports numériques des intervalles correspondants[22].

L'opération la plus importante musicalement est la division, particulièrement la division harmonique[23]. Gassendi distingue trois types de division : arithmétique, géométrique et harmonique. Il décrit donc les procédés pour trouver un terme moyen entre deux termes initiaux, de telle sorte que la série des nombres ainsi obtenus forme une progression arithmétique, géométrique ou harmonique.

La division géométrique ne peut s'effectuer qu'à partir de nombres carrés ou de l'unité, car il s'agit, comme le dit Gassendi, d'extraire la racine carrée et de la placer entre le nombre carré et l'unité. Pour diviser arithmétiquement, il faut additionner les termes et de les diviser par deux. La division harmonique s'effectue quant à elle en deux étapes les termes sont d'abord divisés arithmétiquement, puis le moyen terme ainsi obtenu est multiplié avec les termes initiaux, qui eux-mêmes sont multipliés ensemble. Les trois nouveaux termes replacés en ordre croissant forment une série harmonique.

En conclusion de son premier chapitre, Gassendi résume ce qu'est pour lui une proportion : un intervalle qui sépare deux termes, la différence par laquelle le plus grand dépasse le plus petit ou vice versa[24]. Aussi passe-t-il assez facilement de la notion de proportion à la notion d'intervalle musical. Et il donne alors plusieurs exemples de divisions diverses qui sont un exercice préparatoire au calcul des consonances. Il explique par exemple comment l'intervalle double est divisé harmoniquement par les intervalles sesquitierce et sesquialtère, comment l'intervalle sesquialtère est divisé harmoniquement en sesquiquinte et sesquiquarte. Il introduit également quelques problèmes importants en musique : à savoir l'inégalité du diton pythagoricien et de la tierce dite zarlinienne qu'il traduit en ces termes mathématiques : « deux intervalles sesquioctave sont (...) plus grands que la sesquiquarte », et donc le diton pythagoricien de 81/64 est plus large que la tierce zarlinienne de 5/4, obtenue par division harmonique de la quinte.

LE CALCUL DES CONSONANCES

Le second chapitre aborde le calcul des consonances proprement dites. Ce passage révèle l'attachement profond de Gassendi à une pensée de type numérique. Il ne peut envisager les hauteurs sonores sous un angle physique ou comme un *continuum*, encore

---

[22] On retrouve chez Boèce cette même compréhension de la 'soustraction' ou de l' 'addition' de rapports. Lui aussi garde à l'esprit l'application musicale de la théorie des proportions : « il est bien connu que le ton (*tonus*) est la différence entre les accords de quarte (*diatessaron*) et de quinte (*diapente*), de même qu'entre les rapports sesquitierce (*sesquitertia*) et sesquialtère (*sesqualtera*) la seule différence est la sesquioctave » (Boèce, *Institution arithmétique*, trad. de J.Y. Guillaumin, p. 177).

[23] Ce type de division a acquis musicalement de plus en plus d'importance, particulièrement depuis la Renaissance et les théories zarliniennes. Les Anciens privilégiaient davantage la soustraction successive d'intervalles pour obtenir leurs échelles.

[24] « Proportio nihil aliud est, quàm Intervallum, seu distantia, inter duos numeros intercepta, differentia videlicet, qua maior minorem excedit, aut minor à maiore exceditur (...) » (Gassendi, *Manuductio ad theoriam musicae*, p. 637).

moins sous l'angle d'une appréciation subjective. Pour lui, même si la consonance « produit une sensation régulière et agréable », elle doit être établie « selon une certaine proportion » puisqu'elle n'est rien d'autre qu'une composition, qu'un mélange de deux sons, l'un grave et l'un aigu[25]. Cette composition peut être définie par le calcul, en utilisant un monocorde : les divisions successives de la corde, qui correspondent à des rapports de nombres entiers, engendrent des intervalles nouveaux.

Gassendi décrit dès lors son monocorde, ou plutôt son 'duocorde' : deux cordes parallèles sont tendues sur des chevalets. En dessous de l'une d'entre elles, il établit une graduation très précise qui lui permet de répartir les différentes hauteurs sonores en fonction de la division de la corde. Aux différentes proportions correspondent ainsi des intervalles dont Gassendi indique les dénominations grecque et latine (fig. 1).

Gassendi n'innove ni dans sa présentation du monocorde, ni dans la justification de celui-ci. En bon pédagogue, notre auteur décrit les différences entre les théories anciennes et les théories modernes, c'est-à-dire entre la théorie pythagoricienne qui n'admet que trois consonances définies par les quatre premiers nombres entiers et un ton unique de valeur 9/8, et la théorie systématisée par Zarlino qui porte le nombre de consonances de trois à sept et recommande l'usage de deux tons majeur et mineur.

S'il fait état de cette multiplicité théorique, il n'en prend cependant pas toute la mesure. Or, les deux problèmes – l'élargissement du nombre de consonances et l'usage de différentes valeurs pour le ton – étaient alors importants d'un point de vue musical, mais aussi scientifique : ils débouchent sur la question plus large de la 'justification' des consonances et des tempéraments. Or le XVII^e siècle est le témoin d'avancées scientifiques non négligeables dans la résolution de ces questions. Gassendi en parle parce que la théorie traditionnelle qu'elle soit pythagoricienne ou zarlinienne, ne parvient plus à rendre compte de la pratique de l'époque, mais il ne tente pas de repenser fondamentalement le système théorique musical et de le sortir de son carcan arithmétique.

---

[25] « Il faut donc que deux sons donnant naissance à une consonance soit mesurés par le calcul, qu'une proportion soit établie entre eux et qu'on ne garde pas ceux qui créent une dissonance » (Gassendi, *Initiation à la théorie de la musique*, trad. G. Guieu, p. 26).

	Totachorda AB eſt ad parteis heic adnotatas verſus D.	Proportiones, quibus tota AB ſe habet ad parteis chordæ CD deſignatas verſus ipſum D.	Sonorum Interualla dicta iuxta Græcos.	Iuxta Latinos, & Practicos.
	Vt			
h	8 ad 1	Octupla.	Triſdiapaſon.	Vigeſima ſecũda.
g	20 ad 3	Sextupla ſuperbip. 3ᵃˢ.	Diſdiap. hexach. mai.	Vigeſima maior.
f	32 ad 5	Sextupla ſuperbip. 5ᵃˢ.	Diſdiap. hexach. minus.	Vigeſima minor.
e	6 ad 1	Sextupla.	Diſdiap. diapente.	Decima-nona.
d	16 ad 3	Quintupla ſeſqui-tertia.	Diſdiap. diateſſaron.	Decima-octaua.
c	5 ad 1	Quintupla. [5ᵃᵐ.	Diſdiap. ditonus.	Decima-ſept. ma.
b	24 ad 5	Quadrupl. ſuperquadip.	Diſdiap. ſemiditonus.	Decima-ſept. mi.
a	4 ad 1	Quadrupla.	Diſdiapaſon.	Quinta-decima.
Z	10 ad 3	Tripla ſeſqui-tertia.	Diapaſon hexachord. mai	Decima-tert. ma.
Y	16 ad 5	Tripla ſeſqui-quinta.	Diapaſon hexachord. mi.	Decima-tert. mi.
X	3 ad 1	Tripla.	Diapaſon diapente.	Duodecima.
V	8 ad 3	Dupla ſuperbipart. 3ᵃˢ.	Diapaſon diateſſaron.	Vndecima.
T	5 ad 2	Dupla ſeſqui-altera.	Diapaſon ditonus.	Decima-maior.
S	12 ad 5	Dupla ſuperbipart. 5ᵃˢ.	Diapaſon ſemiditonus.	Decima minor.
E	2 ad 1	Dupla.	Diapaſon.	Octaua.
K	5 ad 3	Superbipartiens tertias.	Hexachordon maius.	Sexta maior.
L	8 ad 5	Superbipartiẽs quintas.	Hexachordon minus.	Sexta minor.
F	3 ad 2	Seſqui-altera.	Diapente.	Quinta.
G	4 ad 3	Seſqui-tertia.	Diateſſaron.	Quarta.
H	5 ad 4	Seſqui-quarta.	Ditonus.	Tertia maior.
I	6 ad 5	Seſqui-quinta.	Semiditonus.	Tertia minor.
M	9 ad 8	Seſqui-octaua.	Tonus maior.	Secunda maior.
N	10 ad 9	Seſqui-nona.	Tonus minor.	Secunda maior.
O	16 ad 15	Seſqui-quindecima.	Hemitonium mai.	Secunda minor.
P	25 ad 24	Seſqui-vigeſima quarta.	Hemitoniũ mi. ſeu Dieſis [mai.	Secunda minor.
R	128 ad 125	Supertripartiens 125ᵃˢ.	Dieſis minor.	
Q	81 ad 80	Seſqui-octogeſima.	Comma.	

fig. 1 : le monocorde de Gassendi [26]

[26] Gassendi, *Manuductio ad theoriam musicae*, p. 639.

LE PROBLEME DU TON ET DE SA DIVISION

Dans sa description du monocorde, Gassendi présente à la fois l’échelle de Pythagore et l’échelle de Zarlino[27]. Les Pythagoriciens, nous dit-il à juste titre, ne connaissent qu’un seul ton, de valeur 9/8, issu de la différence entre les intervalles de quinte et de quarte. La tierce ou diton est composée de deux tons. Les deux parties du ton sont le *leimma*, le ‘reste’ de la quarte moins le diton, de valeur 256/243, et l’*apotome*, ou la ‘coupure’ entre le ton et le *leimma*, de valeur 2187/2048. C’est cette échelle musicale que Boèce adopte dans son *De institutione musica*[28].

Zarlino contribue à populariser au XVIe siècle une autre division de l’octave déjà conçue par Ptolémée au IIe siècle. Dans ce modèle, il ne s’agit plus de calculer les intervalles par différences successives à partir des consonances de base que sont l’octave, la quinte et la quarte, mais de les obtenir par divisions harmoniques. Ainsi la division d’une octave produit la quinte et la quarte, la division de la quinte donne les deux tierces ‘naturelles’[29] majeure et mineure de valeur 5/4 et 6/5, et enfin la division de la tierce majeure donne deux tons majeur et mineur de 9/8 et de 10/9, lesquels engendrent à leur tour diverses parties de tons. Gassendi résume l’échelle ainsi obtenue selon un schéma assez conventionnel (fig. 2).

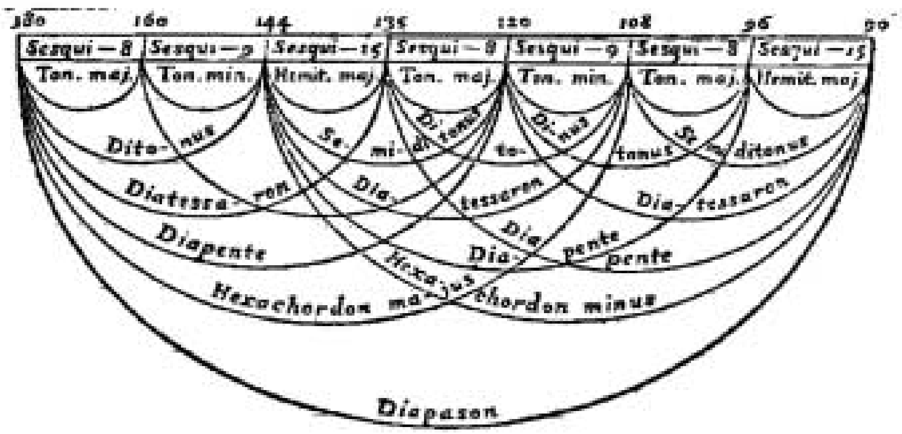

fig. 2 : la division de l’octave selon Gassendi[30]

[27] Zarlino (1517-1590) est un théoricien italien très important dans l’histoire de la musique. Il présente une synthèse peu commune de l’art de son temps, et tente d’intégrer dans une démarche théorique qui se veut fidèle à la tradition arithmétique les progrès musicaux de son temps. Il est ainsi le premier à légitimer l’adoption des tierces parmi les consonances dans une démarche théorique originale que reprend Gassendi.(G. Zarlino, *Le istitutioni harmoniche*, Venetia : Francesco de’ Franceschi Senese, 1558).

[28] Notons que Boèce transmet d’autres échelles, dont celles de Ptolémée et d’Aristoxène, mais il n’en donne pas les détails mathématiques. La gamme de Pythagore fut adoptée par le monde médiéval, à la fois parce que Boèce la recommandait, mais aussi parce qu’elle correspondait à la stylistique de l’époque : la tierce pythagoricienne, très ouverte, convient parfaitement à un type de musique mélodique telle qu’on la trouve jusqu’à la fin du XVe siècle. L’émergence progressive du langage harmonique et l’utilisation de plus en plus fréquente de la tierce sur des degrés forts sonneront le glas de ce système au profit de la gamme dite de Zarlino. (Boèce, *De institutione musica*, in *Boetii de institutione arithmetica libri duo, de institutione musica libri quinque*, (ed. G. Friedlein), Lipsiae, 1868, Nachdruck: Frankfurt a. Main, 1966).

[29] Ces tierces sont dites « naturelles » ou « pures » parce qu’elles ne présentent aucun battement à l’audition. La tierce naturelle ou zarlienne, de valeur 5/4 est moins large que le diton pythagoricien, lequel paraît plus dur car plus large d’un comma syntonique ou zarlinien, de valeur 81/80. C’est pourquoi, à partir du moment où les tierces ont été admises parmi les consonances, les compositeurs ont rapidement préféré cette tierce de valeur 5/4 qui leur semblait plus douce à l’oreille.

[30] Gassendi, *Manuductio ad theoriam musicae*, p. 642.

Cette division du monocorde pose des problèmes qui deviennent cruciaux à partir des XV^e^ et XVI^e^ siècles. Car la multiplicité des tons et parties de tons rend pratiquement impossible l'accord des instruments à sons fixes[31] et la transposition[32]. Aussi utilise-t-on dans la pratique divers tempéraments qui favorisent la justesse de tel ou tel intervalle au détriment des autres selon les goûts, l'instrument et l'usage auquel il était destiné. Au XVII^e^ siècle, le système le plus courant est le tempérament mésotonique : tout en reconnaissant théoriquement l'existence de deux tons de valeurs inégales (9/8 et 10/9), il admet dans la pratique un ton moyen pour l'accord des instruments à sons fixes[33].

Cependant, dès le XVI^e^ siècle, certaines voix s'élèvent pour recommander l'usage du tempérament égal, c'est-à-dire la division de l'octave en douze demi-tons égaux. Cette solution présentait l'avantage d'un accord uniforme des instruments et la facilité de transposition ; son désavantage était de fausser tous les intervalles hormis les octaves, et d'appauvrir considérablement la couleur tonale. Aussi les solutions mathématiques ou empiriques qui peu à peu *prennent* forme rencontrent une ferme opposition fondée musicalement et culturellement sur une tradition séculaire et une stylistique modale précise et raffinée.

Comment Gassendi traite-t-il ce problème ?

Après sa présentation traditionnelle des consonances, notre auteur précise que le ton ne peut être divisé en deux «bien qu'il s'en approche le plus possible ». Car aucun intervalle ne peut harmoniquement être divisé en deux parties. Cependant, il ajoute que «en vérité, le ton peut être divisé en 2 égalités, non pas par une division vraie des intervalles (...) mais par construction d'une ligne de proportion intermédiaire entre CD et ND selon la méthode enseignées par les Géomètres (...) »[34].

Cette phrase est d'importance. Elle révèle l'attachement fondamental de Gassendi à la tradition mathématique telle qu'elle s'applique à la musique, qui procède par division harmonique successive des intervalles pour obtenir les intervalles suivants : pour l'auteur de la *Manuductio* une 'vraie' division des intervalles ne peut être qu'harmonique. Mais d'autre part, il reconnaît ce que les géomètres peuvent faire, et en rend compte. Cependant, il ne veut pas envisager une application directe de la division géométrique aux problèmes des échelles musicales. Tout se passe comme si elle restait un élément extérieur au fait musical, alors que dans la pratique, on utilisait bien évidemment ces demi-tons, et que la division géométrique était recommandée et expliquée par d'éminents théoriciens.

---

[31] Ni l'échelle pythagoricienne, ni l'échelle zarlinienne ne permettaient l'accord uniforme des instruments à sons fixes. Car le cycle des quintes ne se referme pas sur lui-même, c'est-à-dire que douze quintes successives n'équivalent pas à cinq octaves ; la différence est d'un comma pythagoricien (74/73). De la même façon, trois tierces majeures ne valent pas une octave. Aussi pour que les intervalles les plus usités soient 'purs' et 'naturels', c'est-à-dire correspondent à des rapports de nombres entiers, on doit sacrifier d'autres intervalles, lesquels deviennent moins justes, ou franchement faux, comme c'est le cas pour la quinte du loup, souvent formé entre le *sol#* et le *ré#*, degrés peu utilisés à cette époque.

[32] Il était en effet impossible de transposer d'un ton une mélodie sans changer son apparence sonore.

[33] C'est vers 1523 que Pietro Aaron prescrit ce tempérament mésotonique. Il restera en usage pour les orgues jusqu'au XVII^e^ siècle. Les tierces zarliniennes de valeur 4/5 y étaient conservées, mais on substituait aux tons majeur et mineur un ton moyen, entre le ton pythagoricien et le ton mineur. On y trouve 8 tierces parfaitement justes, et 4 autres trop larges ; les quintes sont par contre légèrement fausses et l'une d'entre elles, la quinte du loup (*sol#-ré#*) l'est tout à fait (Pietro Aaron, *Toscanello in musica*, Venetia : Marchio Sessa, 1523). Ce tempérament est encore recommandé par Dom Bedos de Celles en 1766 dans son traité de *l'art du facteur d'orgue* (Bedos De Celles, *L'art du facteur d'orgue*, Paris).

[34] « Unde & posset quidem Tonus in duo æqualia dividi, non bipartitione sanè intervalli, quod est à C ad N, vel M (...) sed inventione lineæ proportionalis mediæ inter CD, & N (aut M) D eo modo quo docent Geometræ » (Gassendi, *Manuductio ad theoriam musicae*, p. 641). Cette constatation avait déjà été notée dans une œuvre attribué à Euclide : « Le ton n'est pas divisible en deux parties égales ni en plusieurs » (Euclide, *Opera omnia*, ed. J.-L. Heiberg et H. Menge, vol. VIII, *Phænomena et scripta musica*, Teubner, 1916, p. 176-177).

Cette méthode géométrique à laquelle Gassendi fait allusion, Mersenne la commente dans son *Harmonie Universelle* de 1636[35]. Mais déjà en 1588, Zarlino décrivait différentes méthodes utilisées pour accorder un luth. Il livre ainsi dans ses *Sopplementi* trois schémas géométriques, assortis des explications adéquates, qui permettent de positionner les frettes sur le manche de l'instrument de manière à obtenir douze demi-tons égaux (fig. 3)[36].

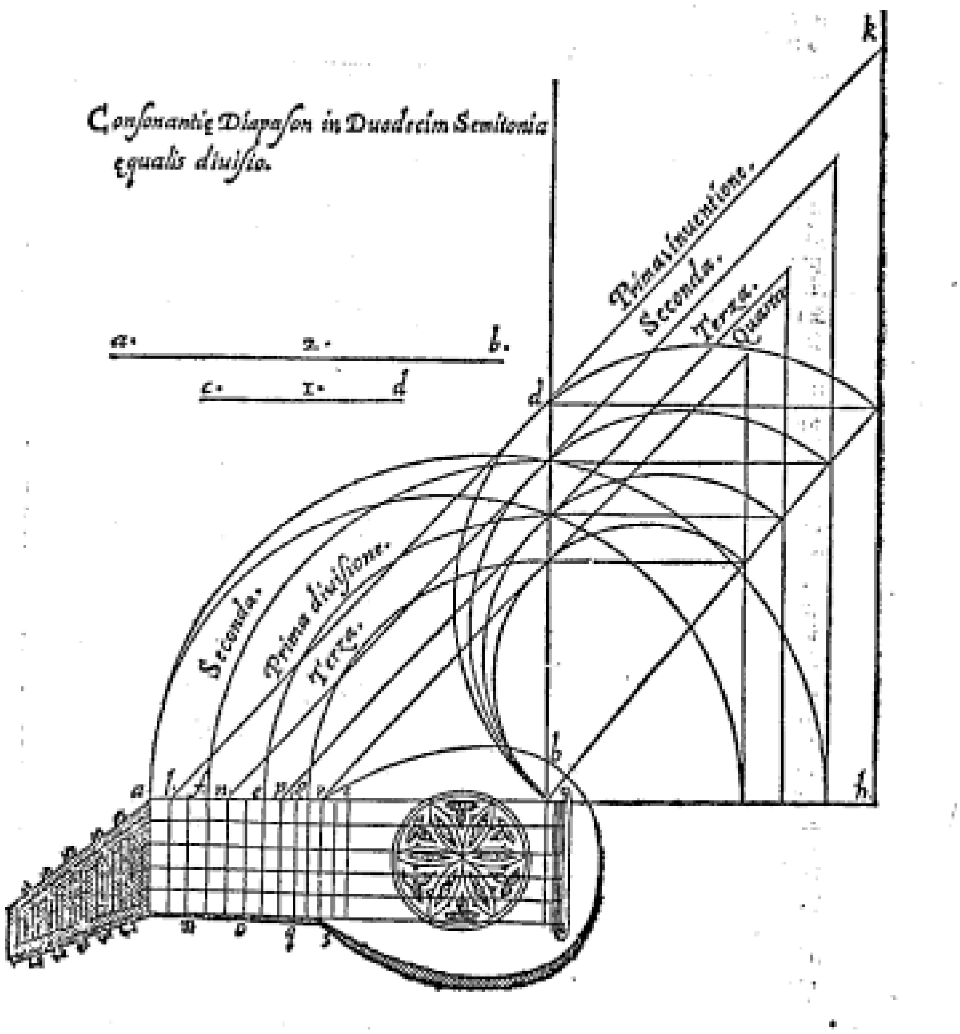

fig. 3 : La division de l'octave en douze parties égales selon Zarlino[37]

[35] « Ceux qui ne savent pas la géométrie, et qui se servent seulement de l'arithmétique vulgaire, croyent et concluent que le ton ne peut être divisé en deux parties égales (...) Mais il est aussi aysé de diviser l'un et l'autre ton, et toutes sortes d'intervalles de Musique en deux parties égales, qu'en deux parties inégales : car si l'on tend une chorde qui soit moyenne proportionelle entre les deux chordes qui font le ton, l'octave, ou quelque autre intervalle, le dit ton, ou l'autre intervalle proposé sera divisé en deux parties égales : de sorte que le premier demy-ton du ton majeur sera justement égal au second demy-ton ». Mersenne détaille ensuite, schéma à l'appui, cette méthode géométrique (M. Mersenne, *Harmonie Universelle*, Paris, 1636, libre second des instruments, proposition VII, p. 65-66, éd. facsimile avec intro. de F. Lesure, Paris, CNRS, 1965, tome 3, p. 65-66).

[36] G. Zarlino, *Sopplimenti musicali*, Venetia 1588, terzo volume, cap. 30-32, p. 208-215, éd. facsimilé, Ridgewood, N.J., The Gregg Press Inc., 1966, p. 208-215.

[37] Il s'agit dans ce schéma de la seconde méthode proposée par Zarlino (G. Zarlino *Sopplimenti musicali*, p. 211).

D’autres techniques plus empiriques étaient connues. Le théoricien et luthiste Vincenzo Galilei, père du grand astronome, recommandait de prendre douze fois de suite les 17/18e de la corde de façon à obtenir douze demi-tons égaux[38].

Il existait également une solution algébrique à ce problème du demi-ton, mais Gassendi ne la mentionne pas. C’est la solution trouvée par Stevin, le premier à donner au tempérament égal un support mathématique. Il imagine en 1585 la notation décimale continue. Les nombres irrationnels tels que $\sqrt{2}$, ne posent plus problème pour lui[39]. Il peut donc calculer précisément $12\sqrt{2}$, c'est-à-dire de la valeur du demi-ton, ce qu’il fait dans un ouvrage rédigé vers 1596 où il décrit son tempérament égal et en propose plusieurs notations[40].

Mais le tempérament égal tel que Stevin l’a conçu n’est pas adopté par les musiciens, ni même par les scientifiques. Gassendi n’en parle pas, Christian Huygens continue à défendre l’intonation juste contre le tempérament de Stevin[41], et Descartes reste partisan de l’échelle zarlinienne, avec ses tons et demi-tons majeurs et mineurs, comme il se plaît à la recommander à des musiciens renommés[42].

On constate donc dans ce problème de la division du ton que Gassendi se veut fidèle, comme d’autres savants de son époque, à la tradition arithmétique, tout en étant conscient que des solutions ont été proposées. Il connaît bien le problème géométrique, mais il refuse de l’intégrer au coeur de sa théorie, et de transformer ainsi radicalement le calcul des hauteurs sonores.

L’APPRECIATION DES CONSONANCES ET LES AFFINITES DE FREQUENCES

Gassendi aborde également la valeur esthétique des consonances et leur justification. A la question concernant la douceur des consonances par rapport à l’apprêté de la dissonance, il fait appel, comme les Anciens, à des notions arithmétiques. Les consonances les plus parfaites (« perfectiores ») sont celles dont la proportion est multiple ou superparticulière,

---

[38] Vincenzo Galilei, *Dialogo della musica antiqua e moderna*, Fiorenza : Giorgio Marescotti, 1581, p. 49-53; *Discorso intorno all’opere di messer Gioseffo Zarlino da Chioggia*, Fiorenza : Marescotti, 1589, p. 55.
Kepler a calculé l’erreur relative de Galilei ; elle est minime : $(17/18)^{12}$ = 0,50363, valeur proche de l’octave (1/2), et donc 17/18 est une approximation assez correcte de la valeur exacte du demi-ton $12\sqrt{2}$ (Kepler, *Harmonices Mundi*, liber III, cap. VIII, p. 48-50, *Gesammelte Werke,* VI, p. 143-145, cité par D. P. Walker, *Studies in Musical Science in the Late Renaissance*, p. 116).

[39] Simon Stevin, *Arithmétique*, 1585, ed. by D. J. Struik dans *Principal Works*, ed. by Ernst Crone et *al*., Amsterdam : Swets & Zeitlinger, 1985, vol. 2B, p. 532.

[40] Simon Stevin, *Van de Spiegheling der Singconst*, ed. by A. D. Fokker, dans *Principal works*, ed. by Ernst Crone et al., Amsterdam : Swets and Zeitlinger, vol. 5, 1966.

[41] Pour Huygens, la quinte de valeur $[(^{12}\sqrt{1/2})^7]$ est moins bonne musicalement que la quinte de rapport 2/3 : « Il est constant par l’expérience, et ceux qui ont tant soit peu d’oreille pour la musique ne peuvent nier, que les consonances suivant les proportions susdites ne soient très parfaites et meilleures que quand on s’écarte de ces véritables proportions numériques. Et ceux qui ont osé soutenir le contraire et que la quinte ne consistast pas dans la raison de 3 à 2, ou n'avaient pas l'oreille capable d’en juger ou croyaient avoir une raison pour cela, mais ils concluaient mal. [Il ajoute en marge :] Stevin dont nous parlerons cy apres » (Ch. Huygens, *Musique,* chap. I : *Théorie de la consonance,* in *Œuvres complètes*, vol. XX, p. 32)).

[42] « (...) Si M. Mauduit vivait encore, il pourrait bien témoigner que la différence qui est entre les demi-tons majeur et mineur, est fort sensible; car, après que je lui eus une fois fait remarquer, il disait ne pouvoir plus souffrir les accords où elle n’était pas observée (...) » (Descartes, *Lettre à Mersenne* d'avril 1634, in *Correspondance*, éd. par Adam et Milhaud, Paris : Alcan, 1936, vol. I, p. 253, A. T., I, p. 286); « (...) Pour vos musiciens qui nient qu’il y ait de la différence entre les demi-tons, c‘est ou par désir de contredire, ou parce qu’ils ignorent le moyen d’en examiner la vérité (...) » (Descartes, *Lettre à Mersenne* du 15 mai 1634, in *Correspondance,* 1936, vol. I, p. 258, A. T., I, p. 295).

par contre, les consonances dont le rapport est superpartissant sont plus faibles[43]. Par exemple les deux sixtes (5/3 et 8/5) sont des intervalles moins parfaits que les tierces (4/5 et 5/6). Et les théoriciens les classent habituellement parmi les consonances imparfaites.

Pour ce qui est de l'intervalle de quarte, Gassendi élude une partie du problème[44], bien qu'il tente de justifier, toujours de manière mathématique, certaines règles d'écriture. Dans l'écriture contrapuntique classique du XVI^e^ siècle et plus encore au XVII^e^, lorsque perce progressivement une pensée harmonique et tonale, la quarte ne peut jamais se situer en dessous d'une quinte : dans une écriture à trois voix, il ne peut y avoir un intervalle de quarte entre la basse et le ténor dès lors qu'il y a un intervalle de quinte entre le ténor et le soprane. Gassendi justifie cette règle d'écriture en invoquant le type de division de l'octave : la suite de nombres correspondant à une quinte suivie d'une quarte, est harmonique, tandis qu'un empilement d'une quarte suivie d'une quinte correspond à une division arithmétique de l'octave. Ainsi, sur un monocorde gradué de 1 à 12, la suite 12-9-6 (quarte + quinte : do-fa-do) est une série arithmétique, tandis que la suite12-8-6 (quinte + quarte : do-sol-do) est une série harmonique.

Gassendi tente cependant, au-delà de la théorie arithmétique, de trouver la raison même de la douceur des consonances. Certes la perfection d'une consonance («perfectio ») reste tributaire de la simplicité de son rapport numérique, mais l'agrément qu'elle nous procure («gratior ») peut provenir d'un autre phénomène, à savoir une affinité de fréquences, phénomène qu'il ne nomme bien entendu par encore comme tel.

La véritable raison de l'agrément des consonances serait donc physique : les « différentes vibrations produites par deux sons si elles sont plus unies, atteignent l'oreille avec plus de douceur et la consonance naît; si elles sont plus désunies, elles la frappent avec plus de rudesse et c'est la dissonance »[45]. Gassendi expose alors la théorie des fréquences relatives répandue par Mersenne, et découverte par Beeckman et Descartes[46]. Il a bien compris que le son est « créé par la fréquence des vibrations de l'air », et lorsqu'on divise une corde en deux parties, « les aller retour seront d'une rapidité double »[47]. Et donc « l'octave peut être obtenue en doublant le nombre de vibrations ». La même expérience est

---

[43] « Observo potius Consonantiarum illas haberi perfectiores, quarum proportio multipla, aut superparticularis est, cuiusmodi sunt Diapason, Diapente, & aliæ, minus vero perfectas illas, quarum proportio est superpartiens, cuiusmodi est utrumque Hexachordon » (Gassendi, *Manuductio ad theoriam musicae*, p. 643).

[44] L'intervalle de quarte (4/3) était une consonance qui posait problème. Elle était en effet considérée théoriquement comme une consonance parfaite, meilleure que la tierce de rapport 5/4. Or depuis les XIII^e^ et XIV^e^ siècles, elle était dans la pratique délaissée au profit des tierces que les compositeurs jugeaient plus douces et plus agréables. De nombreux auteurs se pencheront sur ce problème, peu en trouveront une solution cohérente. Zarlino invoquera les divisions harmoniques successives de l'intervalle d'octave pour accorder à la tierce une priorité sur la quarte. Descartes dans un premier temps agira de façon semblable, traitant la quarte 'd'ombre de la quinte', mais il faudra attendre les premières expériences sur les sons harmoniques et les fréquences vibratoires pour que se profile une justification théorique qui ne contredise plus la pratique.

[45] Gassendi, *Initiation à la théorie de la musique*, trad. G. Guieu, p. 38 ; « Dico causam videri, quod cum sonus creetur non tam velocitate quàm crebritate ictuum aëris, quibus auris, auditusve sensorium imperceptibili tempore percellitur; ictus varij duorum sonorum unitiores sint leniusque aurem afficiant, dum creatur consonantia, distractiores sint, & asperiùs afficiant, dum creatur dissonantia » (Gassendi, *Manuductio ad theoriam musicae*, p. 643).

[46] C'est sans doute chez Descartes que l'on trouve de façon la plus marquée cette évolution d'une pensée mathématique à une pensée physique. Dans son *Compendium musicæ* de 1618, les hauteurs sonores sont calculées sur base de la division du monocorde et les consonances sont classées en fonction de la simplicité de leur rapport numérique. Mais vers 1630, dans son *Traité de l'Homme*, son approche du son est plus physique : le son devient un tremblement de l'air qui « chatouille nos oreilles », et partant de cette définition et de la loi de la vibration des cordes dont Beeckman lui avait parlé, il envisage la justification des consonances et dissonances sur base de leur fréquence relative : deux sons sont d'autant plus consonants que leurs « tours et retours » de cordes concordent, et donc que les battements (*ictus*) de ces sons frappent nos oreilles de façon régulière et simultanée.

[47] « Tunc erunt itus, reditusque duplo velociores, ac plures binive exæquati singulis pulsibus » (Gassendi, *Manuductio ad theoriam musicae*, p. 643).

menée pour la division de la corde en trois et quatre parties[48]. Il n'est cependant pas aussi explicite que Descartes qui dans son *Traité de l'homme* et dans une lettre à Mersenne, présente une des premières théories physiques du son, donne quelques schémas pour expliciter ces dires, et en fait la base de sa théorie de la consonance[49].

Gassendi est cependant conscient des lacunes de cette théorie physique, notamment au niveau du calcul du nombre de vibrations par seconde, cette dernière n'étant pas définie avec exactitude. Il en conclut que « dans la pratique, la comparaison des longueurs est beaucoup plus facile que celle des mouvements et pulsations de l'air (...) »[50]. Il en revient donc à la théorie arithmétique qui lui permet de calculer et de juger avec certitude de la valeur des consonances et des dissonances, alors qu'il avait en main les clés d'une compréhension moderne du phénomène consonantique.

On peut donc constater au fil de ces quelques lignes l'attachement de Gassendi à une pensée numérique traditionnelle. Certes, il ne méconnaît pas les découvertes de ses contemporains, qu'elles soient géométriques ou physiques, mais il ne juge pas opportun de reconsidérer l'ensemble de la théorie arithmétique ou de les intégrer dans une nouvelle démarche spéculative qui permettrait de rendre compte des avancées esthétiques et stylistiques de la musique du XVIIe siècle.

---

[48] « Si vous bloquez une même corde, quelle que soit sa longueur, non pas au milieu, mais au 1/3 et ébranlez le reste égal au 2/3, vous observerez au total 3 vibrations (*pulsibus*) sur une partie correspondant à 2 sur l'autre, selon une proportion sesquialter. Si vous la bloquez au 1/4, le reste étant les 3/4, vous obtiendrez la proportion sesquitierce, c'est-à-dire 4 vibrations d'un côté correspondant à 3 de l'autre » (Gassendi, *Initiation à la théorie de la musique*, trad. G. Guieu, p. 39).

[49] R. Descartes, *Lettre à Mersenne d'octobre 1631*, A. T., I, p. 224-226; R. Descartes, *Traité de l'homme* , A. T., XI, p. 150-151.

[50] Gassendi, *Initiation à la théorie de la musique*, trad. G. Guieu , p. 41.