GEOMETRIE NON ARCHIMEDIENNE ET NOMBRES TRANSFINIS DANS LES *FONDAMENTI DI GEOMETRIA A PIU DIMENSIONI* DE GIUSEPPE VERONESE

Jean-Daniel VOELKE (Lausanne)

INTRODUCTION

Les *Fondamenti* de Veronese constituent un ouvrage considérable (plus de 600 pages). L'auteur y tente une synthèse englobant à la fois l'arithmétique et la géométrie. Cet ouvrage comprend trois parties : une introduction consacrée aux « formes mathématiques abstraites »[1], une première partie traitant des géométries euclidienne, non euclidienne et « riemannienne »[2] à une, deux et trois dimensions et une seconde partie consacrée aux espaces à quatre et *n* dimensions.

Je me limiterai à analyser l'introduction, qui constitue le premier tiers de l'ouvrage. Veronese y expose une théorie du nombre, incluant les nombres naturels et un système de nombres infinis et infiniment petits. Cette théorie est fondée sur des considérations à la fois ensemblistes et géométriques. Elle combine l'idée de nombre transfini, introduite par Cantor, et celle de système de grandeurs non archimédien, suggérée par Paul du Bois-Reymond et étudiée plus en détail par Otto Stolz. A ces trois influences, il faut encore ajouter, dans une moindre mesure, celles de Dedekind (*Was sind und sollen die Zahlen ?*) et de Peano (*Arithmetices Principia*). Les définitions ensemblistes de **N** proposées par ces deux mathématiciens ont probablement incité Veronese à réfléchir lui aussi aux propriétés des ensembles finis et des nombres naturels.

J'aurai l'occasion de montrer au cours de cette étude quels sont les concepts que Veronese a repris de Cantor et de quelle manière ses nombres transfinis se distinguent de ceux de son prédécesseur[3] . Les travaux de du Bois-Reymond et Stolz sont à l'origine des idées les plus originales de Veronese. Moins connus que ceux de Cantor, ils méritent que l'on s'y attarde. Je commencerai donc par retracer le développement des idées non archimédiennes chez ces deux mathématiciens.

---

[1] J'expliquerai plus loin ce qu'il faut entendre par ce terme.

[2] À cette époque, le terme « géométrie riemannienne « désigne la géométrie « de l'espace fini « , c'est-à-dire la géométrie sphérique ou la géométrie elliptique. Dans le cas des *Fondamenti*, il s'agit de la géométrie sphérique.

[3] Au moment où Veronese effectue ses recherches, Cantor a déjà donné un premier exposé relativement complet de sa théorie dans ses *Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre* [1883,2]. Veronese se réfère à cet ouvrage ainsi qu'aux *Mitteilungen zur Lehre der Transfiniten* [1887, 3].

CHAPITRE 1 : ORIGINE DES IDEES

§ 1 Les travaux de Stolz et du Bois-Reymond

Comme on le sait, la fin des années 1860 est marquée par une renaissance de la géométrie non euclidienne et par la découverte des premières constructions des nombres réels. Ces deux événements sont sans doute à l'origine de l'intérêt porté, à partir de 1880, aux systèmes de grandeurs non archimédiens.

La géométrie non euclidienne constitue le premier exemple d'une théorie fondée sur la négation d'un axiome jugé « évident ». En découvrant des modèles du plan et de l'espace non euclidien, Beltrami et Klein réussissent à établir la non-contradiction relative de la géométrie non euclidienne et l'indépendance du postulat des parallèles. Cet exemple montre aux mathématiciens qu'il convient de s'interroger sur l'indépendance d'un axiome par rapport à un système d'axiomes ; il suggère de plus la méthode à suivre pour résoudre ce genre de problèmes : il faut exhiber un modèle.

De leur côté, les premières constructions des nombres réels permettent de clarifier l'idée de continuité. Elles montrent notamment que le principe de coupure de Dedekind peut être choisi comme axiome de continuité de la droite. Ayant réussi à formuler clairement de nouveaux axiomes, les mathématiciens peuvent commencer à réfléchir à leur indépendance. Ce type de recherches sera systématisé dans les *Grundlagen* de Hilbert.

Après le postulat des parallèles, l'axiome d'Archimède a fait l'objet d'une recherche du type décrit ci-dessus. Le mérite en revient à Otto Stolz. Un tel intérêt de la part de ce mathématicien n'est pas surprenant. On sait en effet par Klein que Stolz avait porté dans les années 1870 un vif intérêt à la géométrie non euclidienne et instruit Klein dans ce domaine. Ce dernier qualifie d'ailleurs Stolz de « logicien par excellence » (1926, 14, p.152).

L'essentiel des recherches de Stolz est présenté dans [1883,19]. Comme il le rappelle au début de son article, la géométrie des Anciens fait à plusieurs reprises appel implicitement ou explicitement à l'axiome suivant : une grandeur peut être multipliée suffisamment souvent pour qu'elle surpasse chaque grandeur de même nature. D'autres mathématiciens ont, avant Stolz, remarqué l'utilisation de cet axiome ; il est cependant le premier à avoir essayé de préciser son rôle et à s'être interrogé sur son indépendance. Il montre ainsi que l'axiome d'Archimède n'est pas une « conséquence nécessaire » de la notion de système de grandeurs puisqu'il existe des systèmes de grandeurs non archimédiens[4]. Le calcul infinitaire de du Bois-Reymond fournit en effet un exemple d'un tel système[5]. Il convient de donner ici quelques détails sur ce calcul.

L'idée fondamentale est exposée pour la première fois dans [1870-71, 8]. Appelons F l'ensemble des fonctions réelles tendant vers l'infini lorsque x tend vers l'infini. Du Bois-Reymond propose de comparer deux éléments de F en fonction de la limite de leur quotient lorsque x tend vers l'infini. Il pose ainsi $f(x) > \varphi(x)$, $f(x) \sim \varphi(x)$, ou $f(x) < \varphi(x)$ selon que $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \infty$, $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{\varphi(x)}$ est finie et non nulle ou $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = 0$. Il ne précise cependant pas quelles sont les fonctions qui peuvent être ainsi comparées et suppose implicitement que le quotient a toujours une limite, ce qui n'est pas le cas[6]. Cette idée sera développée dans une série d'articles publiés entre 1871 et 1881. Il n'est pas nécessaire de donner ici plus de détails sur leur contenu.

Dans son article, Stolz considère un système restreint de fonctions toujours comparables. Il s'agit des fonctions rationnelles formées à partir des puissances à

---

[4] Les axiomes caractérisant un système de grandeurs sont donnés plus loin.

[5] Ce calcul a fait l'objet d'une longue étude de Gordon Fisher [1981, 10]. Dans son article, cet historien fait part de son intention de publier une autre étude sur les nombres transfinis de Veronese. Je n'en ai cependant pas trouvé trace.

[6] On pourra se référer à un ouvrage de Godefrey Hardy [1910, 12].

coefficients positifs des fonctions x, $l(x) = \ln x$, $l_2(x) = l(l(x))$, $l_n(x) = l(l_{n-1}(x))$, $e(x) = e^x$, $e_2(x) = e(e^x)$, ..., $e_n(x) = e(e_{n-1}(x))$.

Stolz attribue à chaque fonction f(x) une grandeur appelée son « infini » et notée U(f). Il pose $U(f) = U(f_1)$ si $f \sim f_1$, $U(f) < U(f_1)$ si $f < f_1$ et $U(f) > U(f_1)$ si $f > f_1$. On a $U(f) + U(f_1) = U(ff_1)$ et, si $U(f) > U(f_1)$, $U(f) - U(f_1) = U(f : f_1)$. De plus, $nU(f) = U(f^n)$.

On constate immédiatement que ce système de grandeurs est non archimédien. En effet $U(x) < U(e^x)$ et il n'existe pas d'entier n tel que $nU(x) > U(e^x)$.

Stolz attribue à du Bois-Reymond le mérite d'avoir reconnu la différence entre grandeurs archimédiennes et non archimédiennes. Il est vrai que ce dernier, dans son *Allgemeine Functiontheorie,* distingue entre quantités « linéaires » et « non linéaires » (1882-1995,9, p. 52-54). Les premières présentent entre autres propriétés de vérifier l'axiome d'Archimède. La non-vérification de cet axiome n'est cependant pas présentée comme une propriété caractéristique des quantités non linéaires. Il faut par ailleurs relever que, dans ce même ouvrage, du Bois-Reymond donne la parole à un « idéaliste »[7] qui tente de prouver l'existence de quantités infiniment petites. Je cite sa « démonstration » car elle montre de quelle manière vague le problème est abordé :

> La proposition que le nombre des points de division de l'étendue unité est infiniment grand engendre avec une nécessité logique la croyance à l'infiniment petit.
> En effet, nous avons établi plus haut que, selon le véritable concept de grandeur, les points ne se suivent pas les uns les autres sans intervalle sur la longueur, qu'ils ne peuvent donc se rejoindre mais sont toujours séparés par des étendues infiniment nombreuses. Donc de ses étendues aucune ne peut être finie, c'est-à-dire ne peut être contenue un nombre fini de fois dans l'unité de longueur, parce que, l'unité de longueur étant arbitraire, toute étendue si petite qu'elle soit doit être constituée comme l'unité de longueur, et contenir aussi une infinité de points de division.
> On voit donc que l'étendue unité se décompose en une infinité d'étendues partielles, dont aucune n'est finie. Ainsi l'infiniment petit existe réellement. (Traduction de G. Milhaud, 1887-1995, 9, p. 73).

Avec de tels arguments, il n'est pas surprenant que le problème des infiniment petits aient donné lieu à des disputes. Dans l'appendice de ses *Fondamenti*, Veronese note que l'idéaliste croit à l'infiniment petit mais ne le définit pas (1891, 24, p. 621). À la suite de cette preuve, l'idéaliste de du Bois-Reymond énonce quelques propriétés de ces quantités :

> Un nombre fini d'étendues infiniment petites ajoutées les unes aux autres ne donne pas une étendue finie, mais de nouveau une étendue infiniment petite. [...]
> Deux quantités finies dont la différence est infiniment petite sont égales. [...]
> Une quantité finie ne change pas si on y ajoute ou qu'on en retranche un infiniment petit (*ibidem*, p. 73-75).

Il ne peut évidemment donner un sens précis et une justification à ces propriétés. Je montrerai plus loin de quelle manière Veronese a abordé ces questions.

Comme on le voit, les travaux de du Bois-Reymond sont souvent obscurs. Il n'utilise d'ailleurs pas son calcul infinitaire afin de donner un exemple de système contenant des infiniment petits. Il appartient ainsi à Stolz d'avoir su tirer de ces travaux certaines conclusions et de les avoir exprimées clairement.

Dans ses *Vorlesungen über allgemeine Arithmetik* [1885, 20], Stolz réexposera le modèle non archimédien présenté ci-dessus ainsi qu'un autre intitulé système des «

---

[7] Du Bois-Reymond fait parler deux personnages : un idéaliste et un empiriste. Il déclare qu'aucun des deux n'a sa préférence (1882-1995, 9, p. 29). On ne peut donc affirmer sans autre référence que du Bois-Reymond est un défenseur de l'infiniment petit.

moments de fonction »[8]. Il montre en particulier que les moments peuvent être intégrés dans un système plus complet comprenant notamment les nombres réels positifs ; les moments sont alors « infiniment petits » par rapport à ces nombres. Une telle appellation ne manquera pas de susciter l'hostilité de Cantor[9]. Celle-ci est en l'occurrence exagérée ; Stolz adopte en effet une attitude réservée à l'égard du statut ontologique de ses infiniment petits. Dans un article ultérieur, il déclare à ce sujet :

> Les moments sont seulement formellement infiniments petits, i. e. pour le calcul ou, si l'on veut, sur le papier [10] [...].
> Je suis très éloigné d'attribuer au système de grandeurs qui vient d'être décrit autre chose qu'une valeur formelle. (1888, 21, p. 603).

Je présenterai maintenant le deuxième aspect des recherches de Stolz ; elles concernent la place de l'axiome d'Archimède parmi les axiomes de continuité. Ainsi, après avoir donné un modèle non archimédien, Stolz examine dans son article le rapport entre l'axiome d'Archimède et le principe de coupure de Dedekind. Il suppose à cet effet qu'un système de grandeurs Π satisfait aux propriétés suivantes :

> 1) Deux grandeurs du système peuvent être ou égales ou inégales et dans le dernier cas l'une d'elles peut être qualifiée de plus grande.
> 2) Les grandeurs se laissent additionner comme les nombres naturels, en particulier la somme de deux d'entre elles est une grandeur du système.
> 3) Si $A < B$, il existe dans le système une et une seule grandeur X telle que $A + X = B$.
> 4) Entre deux grandeurs inégales il y a toujours encore une grandeur du système et il y a à côté de chaque grandeur encore une plus petite mais il n'y a pas une plus petite grandeur. (1883, 19, p. 506-507).

Ces propriétés sont calquées sur celles des nombres rationnels positifs. Il convient de relever ici le caractère axiomatique de la démarche de Stolz. Le système est en effet « défini » par ses propriétés.

Considérons une partition d'un tel système en deux ensembles P_1 et P_2 tels que $A \in P_1$ et $B \in P_2 \Rightarrow A < B$. Quatre cas sont possibles :

1) P_1 a un dernier élément et P_2 un premier élément
2) P_1 a un dernier élément et P_2 n'a pas de premier élément
3) P_1 n'a pas de dernier élément et P_2 a un premier élément
4) P_1 n'a pas de dernier élément et P_2 n'a pas de premier élément

Le premier cas est exclu en vertu de l'axiome 4 auquel satisfait un système de grandeurs. Une partition en deux parties P_1 et P_2 satisfaisant au quatrième cas est appelée par Stolz une « lacune ».

Stolz démontre dans son article qu'un système sans lacunes, c'est-à-dire continu au sens de Dedekind, est archimédien. Il est apparemment le premier à avoir donné une telle démonstration. Celle-ci repose sur le fait que, dans un tel système, tout ensemble borné admet une borne supérieure.

Considérons encore un système présentant des lacunes. Deux cas sont possibles :

---

[8] Stolz considère un ensemble de fonctions qui tendent par valeurs positives vers 0 lorsque x tend vers +∞. A chaque fonction f de cet ensemble est attribué un « moment» U(f). U(f) est égal, plus grand ou plus petit que U(g) selon que $\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ est égale, plus grande ou plus petite que 1.

[9] Cf. lettre à Veronese du 7 septembre 1890, citée au §.4.

[10] En utilisant cette expression, Stolz n'est pas très éloigné de Cantor. Dans une lettre à Peano du 28 juillet 1895, Cantor déclare en effet à propos des nombres transfinis de Veronese que ceux-ci n'ont une existence que « sur le papier « (1991, 5, p. 361).

1) Il existe une grandeur D telle que B - A > D, $\forall$ A $\in$ P_1 et B $\in$ P_2.
2) Pour toute grandeur D, on peut trouver A $\in$ P_1 et B $\in$ P_2 avec B - A < D.

Dans le premier cas, Stolz parle de « lacune de première espèce » et dans le second cas de « coupure ». Dans ses *Vorlesungen über allgemeine Arithmetik,* il démontre que si le système est archimédien, seules des coupures sont possibles (1885, 20, p. 81). Il établit la réciproque dans un article ultérieur [1891, 22]. Un système de grandeurs peut donc être complété par la méthode des coupures si et seulement si il est archimédien. Dans une note de ce dernier article, Stolz signale que c'est Veronese qui a attiré son attention sur la réciproque. La place de l'axiome d'Archimède au sein des axiomes de continuité a en effet fait l'objet à cette époque de recherches de Veronese. C'est l'objet du paragraphe suivant.

§ 2 Continuité au sens de Veronese

Avant de publier ses *Fondamenti*, Veronese a rédigé un article consacré à la continuité d'un système de grandeurs [1890, 23]. Son but est de donner une caractérisation axiomatique de la continuité qui ne suppose pas, comme celle de Dedekind, implicitement l'axiome d'Archimède et laisse par là ouverte la possibilité d'un système non archimédien.

Dans son article, Veronese introduit, à l'instar de Stolz, un système de grandeurs absolues défini axiomatiquement. Il qualifie un tel système de « système homogène à une dimension ». À une exception près, il fait les mêmes hypothèses que Stolz[11]. Il introduit assez rapidement un langage géométrique et appelle « intervalle » AB l'ensemble des grandeurs comprises entre A et B. L'axiome 3 de Stolz devient ainsi :

> Soit A un élément quelconque du système homogène à une dimension Σ, il y a un et un seul intervalle (AC) égal à un intervalle donné quelconque de Σ dans le sens du système. (1890, 23, p. 609).

Veronese justifie cette « géométrisation » dans une note :

> En parlant d'intervalles au lieu de grandeurs, on a l'avantage non négligeable d'avoir quelques représentations intuitives du système Σ, par exemple : le rayon rectiligne; sans pourtant que l'intuition doive entrer comme élément nécessaire dans les définitions et les démonstrations. (*ibidem*, p. 610).

La dernière affirmation est reprise et développée dans la préface des *Fondamenti.* Veronese insiste sur le fait que les axiomes de la géométrie sont choisis en fonction de critères intuitifs, mais que, une fois les axiomes posés, l'intuition doit être absente des démonstrations.

Dans son article, Veronese donne une caractérisation de la continuité en deux étapes. Voici la première :

> Principe IV. Si l'intervalle (XX') dont les extrémités sont toujours variables en sens opposés devient infiniment petit [plus petit que n'importe quel intervalle du système], il contient toujours un élément Y distinct de X et X'. (*ibidem*, p. 612).

Veronese démontre que l'élément Y est unique. On reconnaît là le principe dit « des intervalles emboîtés de Cantor »[12]. Veronese juge qu'il se justifie intuitivement mieux que

---

[11] Veronese entend démontrer que l'addition est commutative ; sa démonstration comprend cependant des lacunes, relevées par Otto Hölder dans un article également consacré à la notion de système de grandeurs [1901,13]. Dans son article, ce dernier reprend l'axiomatique de Veronese et démontre qu'un système de grandeurs archimédien est commutatif.

[12] Ce principe n'est pas explicitement formulé par Cantor. Comme on le sait, ce dernier expose sa construction des nombres réels au moyen des « suites fondamentales « dans [1872, 1]. Après avoir noté que l'on peut associer à tout point d'une droite un nombre réel, il pose comme axiome la réciproque. On en déduit alors le principe des intervalles emboîtés.

le principe de coupure de Dedekind. Il offre de plus l'avantage de laisser ouverte la possibilité d'une système non archimédien car il n'exclut pas l'existence de lacunes. Le deuxième axiome de continuité introduit par Veronese est le suivant :

> Principe V. Si α et β sont deux intervalles du système et si $\alpha < \beta$ il y a toujours un symbole de multiplicité (nombre) η déterminé tel que $\alpha.\eta > \beta$. (*ibidem*, p. 613).

Un système satisfaisant aux principes IV et V est appelé « système homogène à une dimension continu absolu ». Si η est toujours un nombre naturel, le système est qualifié de « continu ordinaire ». Dans ce cas, le principe V est l'axiome d'Archimède. Veronese se limite dans la suite de l'article à un tel système. Remarquons que des nombres transfinis n'ont pas été définis et que l'on ne voit pas, à ce stade, quels autres nombres pourraient intervenir dans le principe V. Nous verrons plus loin comment les *Fondamenti* apportent une réponse à cette question.

La conjugaison des principes IV et V permet à Veronese de démontrer qu'une suite croissante (décroissante) bornée d'intervalles (AX_n) admet une borne supérieure (inférieure). On reconnaît dans cet énoncé le principe de continuité dit « de Weierstrass » ; il est équivalent au principe de Dedekind.

Dans la dernière partie de son article, Veronese tente d'élargir la notion de système de grandeurs à celle de système de segments d'une droite. Il décide donc de « rajouter » au système inital Σ un système « opposé » et de compléter le principe II par le principe suivant :

> Principe VI. Dans le système Σ il y a deux segments (B'A), (AB) de sens opposé égaux entre eux. (*ibidem*, p. 622).

Un système satisfaisant aux principes I à VI est qualifié de « système continu à une dimension identique dans la position de ses parties ». Il vérifie en particulier la proposition suivante :

> b) Si l'on se donne un élément quelconque X de Σ il y a deux segments de sens opposé et d'extrémité commune X égaux à un segment quelconque donné de Σ. (*ibidem*, p. 622).

Cette extension n'est pas rigoureuse. Si l'on imagine intuitivement facilement ce qu'est le système « opposé »,Veronese n'en donne pas de définition claire. Le passage des grandeurs aux segments nécessite des précautions ; il y a entre les segments une relation de congruence qui n'existe pas entre les grandeurs. Il faut savoir si les éléments de Σ sont des points ou des segments. A cet égard, l'énoncé de la proposition b) est révélateur de la confusion qui règne ; il est d'abord question d'un point comme élément de Σ et ensuite d'un segment. Comme Hölder le souligne dans l'article mentionné ci-dessus, les axiomes caractérisant un système de grandeurs ne peuvent sans autre être repris pour caractériser le système des segments d'une droite géométrique.

CHAPITRE 2 : ANALYSE DE L'INTRODUCTION DES *FONDAMENTI*

Dans ses *Fondamenti*, Veronese adopte une autre méthode que dans l'article qui vient d'être étudié. Il ne fait pas appel à des notions primitives « définies » par des axiomes mais entend définir tous les concepts qu'il introduit. Les premières définitions ne définissent cependant pas grand chose et le lecteur moderne est surpris par ce « retour en arrière ». Ce changement de méthode a une raison épistémologique. Veronese y fait allusion dans son article en déclarant :

> [...] selon moi la mathématique pure n'est pas dans ses fondements une combinaison arbitraire de signes mais est une science de concepts qui jaillissent directement des axiomes logiques, des opérations mentales communes au sens déterminé et unique et de l'examen du continu intuitif dans sa forme la plus simple. (1890, 23, p. 603-604).

Il y a là sans doute une allusion aux travaux contemporains de Peano concernant l'axiomatisation de l'arithmétique et de la géométrie. Pour Veronese, les concepts primitifs ont un sens précis et une théorie mathématique ne peut se réduire à un enchaînement d'énoncés sémantiquement neutres. Quoique non axiomatique au sens moderne du terme, l'exposé de Veronese se caractérise par un souci constant d'indiquer au lecteur de quelle manière la théorie se construit. Ainsi, chaque démonstration comporte toutes les références des définitions et résultats utilisés, ce qui alourdit souvent le texte.

Dans ce qui suit, j'analyserai brièvement le contenu des cinq premiers chapitres, consacrés notamment aux ensembles finis et, selon la terminologie de Dedekind, « simplement infinis » ; je me pencherai ensuite plus en détail sur le chapitre VI, dans lequel est défini un système de nombres transfinis.

§ 1 Notions ensemblistes ; définition des entiers naturels

Voici le début de l'ouvrage :

> 1. Je pense.
> 2. Je pense une chose ou plusieurs choses. [...]
> 3. Je pense d'abord une chose, ensuite une chose.
>
> Définition : J'appelle la chose pensée en premier première chose, j'appelle la chose pensée ensuite (après) seconde chose. (1891, 24, p. 2).

La première phrase témoigne probablement de l'influence de Hermann Grassmann. Dans son *Ausdehnungslehre*, Grassmann distingue en effet les sciences formelles des sciences expérimentales. La mathématique « pure » est du premier type et constitue la théorie des « formes de pensée » ; elle est opposée à la géométrie, qui renvoie à un être réel : l'espace (cf. [1844-1994, 11, p.VIII-IX]). Ces affirmations sont reprises par Veronese dans sa préface et le plan de son livre est conforme à cette division en deux : l'introduction est consacrée à la mathématique « pure » et le reste à la géométrie. Le « je pense » initial est donc destiné à indiquer le domaine dans lequel Veronese entend se situer. Remarquons que l'évocation de l'acte originel de pensée apparaît aussi à la même époque chez Dedekind[13].

Dans ces premières lignes, Veronese exprime la primauté des concepts d'ensemble (un-plusieurs) et d'ordre (avant-après). Après avoir énoncé quelques principes logiques fondamentaux, il introduit en effet les notions de « groupe » et de « groupe ordonné », qui correspondent à celles d'ensemble et d'ensemble ordonné. Veronese effectue une distinction peu claire entre « série » et « groupe ordonné » . Dans la série, les éléments sont considérés comme ordonnés sans être « pensés ensemble » alors que le groupe ordonné réunit les caractéristiques du groupe et de la série. La définition qu'il donne de l'ordre prête à confusion et laisse entendre que, pour utiliser la terminologie de Cantor, le type d'ordre d'un ensemble ordonné est toujours celui des nombres naturels :

> 19. Déf. Considérer la *succession* ou *série* de choses ABCD...N.... signifie considérer les choses ABCD...N.... dans l'ordre ABCD...N.... L'ordre ABCD....N.... s'appelle *ordre* de la succession. (*ibidem*, p. 7).

[13] Il écrit en effet au début de *Was sind und sollen die Zahlen?* : « 1. Dans ce qui suit j'entends par chose chaque objet de notre pensée « . (1888-1932, 7, p. 344).

On a ici un bon exemple des premières « définitions » de Veronese. L'importance accordée à la notion de groupe ordonné témoigne de l'influence de Cantor[14] .

Après avoir défini l'inclusion, la réunion de deux ensembles ainsi que l'ensemble vide (qualifié de « groupe nul »), Veronese termine le premier chapitre en introduisant les notions suivantes, qui vont permettre de définir les ensembles finis :

> 32. Déf. I. Si une série a un premier et un dernier objet, elle est dite *limitée*. [...]
> Déf. II. Si la série n'a pas un dernier objet elle s'appelle *illimitée* ou *sans fin*, [...]. (*ibidem*, p. 12).
> 35. [...] Une série limitée qui ne contient comme partie aucune série illimitée s'appelle série *naturelle* ou *limitée de 1ère espèce*.
> a. Chaque objet X d'une série limitée de 1ère espèce a un objet antécédent et consécutif. (*ibidem*, p. 13).

La démonstration de la propriété a ne pose pas de problème. Veronese ajoute qu'il est possible de considérer une série limitée contenant une série illimitée, ce qui indique bien qu'un groupe ordonné n'est pas nécessairement de type ω. Dans son livre, il suppose cependant que tout élément a un successeur immédiat ; il se restreint donc implicitement à des ensembles bien ordonnés.

La caractérisation des ensembles finis exposée ci-dessus constitue l'un des aspects originaux du travail de Veronese. Elle suppose cependant que l'on travaille avec des ensembles ordonnés.

Le deuxième chapitre s'ouvre avec la définition des « formes mathématiques abstraites », qui, rappelons-le, donnent leur nom au titre de l'introduction :

> « Déf. I. Les choses dont les caractéristiques sont le tout, la partie, l'ordre et le mode de position, ou qui peuvent se comparer au moyen de ces caractéristiques, s'appellent *formes* ou *grandeurs mathématiques abstraites*. » (*ibidem*, p.15).

Nous avons là encore une définition obscure. Il ressort de celle-ci qu'une forme mathématique abstraite est un ensemble ordonné ; je montrerai plus loin ce que Veronese entend en affirmant que le tout est la partie sont des caractéristiques. Il est en revanche difficile de dire ce que signifie « le mode de position ». Veronese donne deux exemples qui ne permettent pas de conclure à une détermination générale.

Il poursuit en donnant une définition des ensembles « simplement infinis » :

> Déf. III. Je dirai qu'une série illimitée qui a un premier élément est illimitée de 1ère espèce si ses parties limitées ayant comme premier élément celui de la série donnée sont de première espèce.» (*ibidem*, p. 17).

Le principe de démonstration par récurrence est une conséquence immédiate de cette définition. Veronese termine le deuxième chapitre en introduisant les notions de « correspondance univoque » entre deux groupes et de « correspondance univoque et dans le même ordre » entre deux groupes ordonnés. On reconnaît dans cette dernière notion l'application « semblable » de Cantor.

Le troisième chapitre s'ouvre avec une définition « générale » du nombre :

---

[14] Dans une lettre à Peano du 27 juillet 1895, Cantor écrit : « Vous connaissez le livre de Veronese. Ce qu'il nomme « groupe ordonné « n'est-il pas la même chose que ce que j'appelle « ensemble simplement ordonné ? « (1991, 5, p. 359).

> Déf. II. Soit un groupe ordonné d'objets ... ABCDE... quelconque ; si l'on considère chacun de ces objets comme unité en faisant abstraction de la façon selon laquelle ils sont posés mais pas de leur ordre, de manière que des objets distincts donnent des unités distinctes, le groupe ordonné d'unités qui en résulte s'appelle *nombre* du groupe donné.
> b. Les éléments du groupe ordonné (A) et les unités du nombre auquel il donne origine se correspondent univoquement et dans le même ordre. [...]
> c. Des nombres dont les unités se correspondent univoquement et dans le même ordre, et dont l'un n'est pas une partie ou égal à une partie de l'autre, sont égaux. (*ibidem*, p. 26-27).

Ces lignes appellent plusieurs commentaires. On retrouve dans les deux premiers paragraphes la notion de type d'ordre ou, dans le cas d'un ensemble bien ordonné, de nombre ordinal. L'introduction d'un nouvel ensemble d'unités semblable à l'ensemble de départ est superflue et ne fait pas avancer le processus d'abstraction. Il faut signaler que, dans ses *Beiträge* [1895, 4][15], Cantor procède de manière analogue ; afin de définir le nombre cardinal d'un ensemble, il introduit un nouvel ensemble d'unités équipotent au premier. Zermelo fait à ce propos un commentaire, qui est aussi valable pour la définition de Veronese :

> Si les « uns » , comme cela doit bien l'être, sont tous différents les uns des autres, ils ne sont alors rien de plus que les éléments d'un nouvel ensemble équivalent au premier et dans le processus d'abstraction nécessaire nous n'avons pas avancé d'un pas. (1932, 4, p. 351).

Veronese se distingue de Cantor par la définition de l'égalité de deux nombres. Pour ce dernier, deux ensembles comme {1, 2, 3,...} et {2, 3,4 , ...} définissent le même nombre ordinal ω ; ce n'est en revanche pas le cas pour Veronese car le deuxième ensemble est un sous-ensemble du premier.

Il justifie sa définition de l'égalité par le fait que le tout et la partie sont des caractéristiques des formes mathématiques abstraites et que l'on ne peut par conséquent pas attribuer le même nombre à un ensemble et à l'un de ses sous-ensembles. La définition de Veronese pose cependant un problème sérieux car elle introduit la notion d'égalité de deux ensembles, qui n'est pas définie. Cette faiblesse n'a pas échappé à Cantor, qui s'est exprimé à ce sujet dans ses *Beiträge* :

> Cette définition de l'égalité contient un cercle vicieux et conduit par là à un non-sens.
> Que signifie donc dans sa note « ne pas être égal à une partie de l'autre » ?
> Pour répondre à cette question, on doit avant tout savoir quand deux nombres sont égaux ou ne le sont pas. Sa définition de l'égalité (abstraction faite de son caractère arbitraire) présuppose une définition de l'égalité, qui à son tour suppose une définition de l'égalité [...] etc..., à l'infini. (1895-1932, 4, p. 301)[16].

Comme je le montrerai plus loin, Cantor était déjà hostile depuis longtemps aux idées de Veronese. Ce cercle-vicieux l'incite donc à conclure à l'absurdité de la théorie des nombres transfinis de Veronese.

L'erreur de ce dernier est ici manifeste ; si l'on veut parler d'égalité de deux ensembles, il faut utiliser la notion de bijection et un ensemble infini est toujours « égal » à l'une de ses parties propres. Cette erreur provient sans doute du fait que Veronese est guidé par une intuition géométrique ; je montrerai plus loin que la forme mathématique abstraite est pour lui une droite. Lorsqu'il parle de nombres, il imagine que ceux-ci correspondent aux points de cette droite, qui peut être non archimédienne. Si l'on attribue à chaque segment un nombre, il est alors naturel d'attribuer des nombres différents à un segment et à un segment

[15] On notera que ce texte est postérieur aux *Fondamenti*.
[16] Ces propos apparaissent aussi dans une lettre à Peano du 28 juillet 1895. Le cercle vicieux est qualifié par Cantor de « monstrueux « (1991, 5, p. 361).

qui le contient. On constate ici que les outils mis au point par Cantor se révêlent inadaptés au propos de Veronese.

Cette explication est donnée est justifiée par la réponse apportée par Veronese aux objections de Cantor [1896, 25]. Son argumentation n'est, une fois de plus, pas très claire; elle consiste plus ou moins à dire que toutes les formes mathématiques abstraites sont en fait des droites et que l'égalité des nombres revient à celle des segments. La fin de sa réponse souligne la différence entre son point de vue et celui de Cantor :

> Je ne nie pas que selon le concept arithmétique avec lequel à un groupe donné d'unités s'en ajoute une autre et ainsi de suite, considérant la série des nombres naturels comme un groupe déjà donné d'éléments (uns), se présentent spontanément les nombres de Cantor ; mais selon le concept géométrique de la droite, ce sont en revanche mes segments infinis, et par conséquent les nombres qu'ils représentent qui se présentent spontanément, quand on fait abstraction, comme cela est possible, de l'axiome d'Archimède. (1896, 25, p. 428).

Après avoir ainsi tenté de donner une définition générale du nombre, Veronese définit les nombres naturels comme ceux correspondant aux groupes ordonnés naturels. L'addition de deux nombres naturels est le nombre correspondant à l'union des deux groupes représentant ces deux nombres[17].

Le chapitre IV commence par une discussion sur la notion de continuité. A l'aide de considérations intuitives, Veronese justifie le choix du principe de continuité exposé dans [1890, 23]. Une explication souvent vague l'amène ensuite à donner la définition d'un système à une dimension :

> 62. Déf. I. La forme donnée par une série quelconque d'éléments qui n'a pas un premier et un dernier élément et dont l'ordre à commencer d'un quelconque de ses éléments est caractéristique de la forme, et de la série inverse, s'appelle *système à une dimension*. (1891, 24, p. 55).

Le système à une dimension est ici présenté comme un ensemble ordonné. Il faut noter qu'à ce stade Veronese ne suppose pas qu'il y a toujours un élément entre deux éléments donnés. Il peut donc y avoir des segments « indivisibles ».

La notion de congruence n'apparaît pas dans la définition d'un système à une dimension. Veronese donne donc au début du chapitre V la définition suivante :

> 68. Déf. I. Si dans un sens du système à une dimension il existe deux segments identiques à chaque segment donné dans le même sens, ayant l'un comme première, l'autre comme seconde extrémité un élément quelconque donné A, le système sera dit *homogène dans le sens donné*. (*ibidem*, p. 62).

Veronese ne définit pas le terme « identique », qui doit être pris comme une notion primitive. Il poursuit avec la définition suivante :

> Déf. I. Si un système homogène à une dimension à partir d'un point donné A dans un sens est identique au système considéré à partir du même point dans le sens opposé, nous l'appellerons *système identique dans la position de ses parties*. (*ibidem*, p. 65).

[17] Dans une note, Veronese se distancie des définitions de Dedekind et Peano : « L'addition chez Dedekind perd sa signification d'union successive de l'unité répétée à l'unité donnée ; c'est une notation avec laquelle à partir du signe d'un élément d'une série (selon nous illimitée de 1ère espèce) on obtient par des théorèmes élégants les signes des autres éléments suivants » . (1891, 24, p. 39).
Veronese reproche ensuite à Peano de réduire l'arithmétique à un « système de signes assujettis à certaines définitions, qui, pour qui ne connaît pas l'arithmétique, sont choisies arbitrairement.» (*ibidem*, p. 39).

On retrouve ici la définition donnée à la fin de [1890, 23]. Le système n'est pour l'instant pas supposé partout dense ni continu. Veronese pose alors deux hypothèses dont la raison est difficile à saisir :

> Hypothèse I. Il y a une forme qui sert à déterminer toutes les autres. Nous appellerons cette forme *forme fondamentale*.
> Les formes fondamentales sont identiques. [...]
> Hypothèse II. La forme fondamentale est un système à une dimension identique dans la postion de ses parties. (*ibidem*, p. 67).

Ces hypothèses reviennent à dire que, dans la suite de l'ouvrage, seuls des systèmes identiques dans la position de leurs parties seront considérés. Remarquons à ce propos que le « mode de position », qui était la caractéristique la plus vague des formes mathématiques abstraites, prend dans ce cas un sens clair : si trois points A, B et C se succèdent, leur mode de position est le même si les segments AB et BC sont congruents.

Veronese donne encore deux définitions dont la raison apparaîtra au chapitre suivant :

> 80. Déf. I. On considère à partir d'un élément A de la forme fondamentale dans un sens donné une série illimitée de 1ère espèce de segments consécutifs égaux à un segment donné (AB).
> Cette série s'appelle *échelle* ; (AB) s'appelle *unité de mesure* ou*unité*, et l'élément A *origine*. [...]
> Déf. III. Par *champ* de l'échelle nous entendons le segment illimité de la forme fondamentale déterminé par tous les segments consécutifs de l'échelle dans le sens de celle-ci. (*ibidem*, p. 77-78).

La fin du chapitre V contient une remarque importante, qui permettra de formuler clairement certaines propriétés des infiniment petits. Considérons deux échelles d'origine A et B et d'unité (AB). Il existe une bijection entre les segments de la première échelle et ceux de la seconde. Veronese utilise ce fait pour dire que les champs des deux échelles sont « égaux relativement à la disposition en série des segments consécutifs des échelles ». Dans son commentaire, il souligne la différence entre égalité absolue et égalité relative. Seule cette dernière a lieu entre les champs d'origine A et d'origine B.

Le segment (AB) est qualifié de « négligeable » relativement au champ de l'échelle d'origine B.

On constate que Veronese utilise ici le fait qu'un ensemble infini peut être mis en bijection avec l'une de ses parties propres, propriété mise en évidence peu de temps auparavant par Dedekind[18].

§ 2 L'hypothèse non archimédienne; définition des infiniment grands et infiniment petits

Nous parvenons maintenant à la partie la plus originale des recherches de Veronese. Il pose, au début du chapitre VI, l'hypothèse suivante :

> Hypothèse III. Dans un sens de la forme fondamentale, il existe au moins un élément hors du champ de l'échelle respectivement à chaque segment limité comme unité. (*ibidem*, p. 84).

Le fait que la forme fondamentale soit un système identique dans la position de ses parties implique immédiatement qu'il existe plusieurs éléments hors du champ de l'échelle. Soit en effet A l'origine de l'échelle, (AA_1) l'unité et A^∞ l'élément donné par hypothèse ; il existe alors deux points B et C tels que $(BA^\infty) \equiv (AA_1)$ et $(A^\infty C) \equiv (AA_1)$. Les points B et C ne peuvent appartenir au champ de l'échelle.

---

[18] Veronese cite un peu plus loin (p. 87) la définition des ensembles infinis donnée par Dedekind dans [1888,7].

La démarche de Veronese est comparable à celle de Bolyai et Lobatchevski. Elle consiste à poser une hypothèse « non intuitive » et à examiner les conséquences qui en découlent. Il faut remarquer cependant que, au plan historique, l'ordre des opérations est inverse. La découverte de la géométrie non euclidienne a précédé celle d'un modèle ; dans le cas de la géométrie non archimédienne, on peut dire que c'est le contraire qui s'est passé, puisque le modèle a d'abord été donné par Stolz. Il convient enfin de noter que le système des infinis de fonctions ou celui des moments de fonctions constituent des modèles non géométriques. C'est donc l'un des mérites de Veronese d'avoir repris de manière géométrique les idées de Stolz et de du Bois-Reymond. Dans une note de ses *Fondamenti* (p. 124), il relève d'ailleurs les analogies et les différences entre son approche et celle de ses prédécesseurs.

Veronese fait à propos de son hypothèse la remarque suivante :

> Cette hypothèse satisfait à toutes les conditions d'une hypothèse mathématiquement possible, qui se réduisent au fond non à des considérations d'ordre philosophique sur l'origine des idées mathématiques, mais à l'absence de toute contradiction. (*ibidem*, p. 86).

Dans l'introduction de son livre, Veronese distingue entre axiomes et hypothèses. Les premiers doivent exprimer des propriétés intuitives alors que les secondes peuvent être arbitraires. Nous verrons plus loin que la possibilité de poser arbitrairement des hypothèses a été l'un des points de désaccord entre Cantor et Veronese.

D'une manière générale, un élément situé hors du champ de l'échelle sera suivi du signe ∞. Un segment du type AA^{∞} sera dit « infiniment grand » par rapport à un segment AB où B appartient au domaine de l'échelle ; réciproquement, AB sera dit « infiniment petit » par rapport à AA^{∞}. Enfin, si AB et CD sont deux segments tels que si AB < CD, il existe un entier n tel que nAB > CD, les segments seront dits « finis l'un par rapport à l'autre ».

Veronese réussit donc à donner un sens à la notion d'infiniment petit. Il se distingue à cet égard de ses contemporains du Bois-Reymond et Cantor, qui, par des arguments obscurs, essayent de démontrer la possibilité ou l'impossibilité des infiniment petits[19] .

Veronese parvient également à préciser certaines propriétés des infiniment petits énoncées de façon vague par l'idéaliste de du Bois-Reymond. Considérons à cet effet les échelles d'origine A et A_1 et d'unité AA_1. En vertu de la terminologie exposée à la page précédente, les champs de ces deux échelles sont « relativement » égaux et le segment AA_1 est « négligeable ». Soit A^{∞} un élément hors du champ des échelles. Le segment AA^{∞} contient le champ de la première échelle et le segment A_1A^{∞} celui de la seconde. L'égalité relative de ces champs conduit Veronese à affirmer que les segments AA^{∞} et A_1A^{∞} sont « égaux relativement à l'unité AA_1 ». Quant au segment AA_1, il est « nul relativement au segment AA^{∞}». En distinguant clairement l'égalité relative de l'égalité absolue, Veronese évite ainsi certains contresens à propos des infiniment petits[20].

[19] La « démonstration « de Cantor est exposée dans [1887,3]. Dans l'appendice de son livre, Veronese fait à propos de ce genre de démonstrations la remarque suivante : « Il est certain que sans une définition d'une idée qui peut avoir des interprétations diverses, on tombe facilement dans la contradiction. « (1891, 24, p .622).

[20] Dans l'appendice de son ouvrage, Veronese fait la remarque suivante : « [...] je dirai que aussi bien ceux qui croient à l'infiniment petit que leurs critiques n'ont pas bien distingué l'égalité relative de l'égalité absolue « ; (*ibidem*, p. 622).

§ 3 Ordres d'infinité; définition d'un premier système de nombres transfinis

Considérons maintenant l'échelle d'origine A et d'unité AA_1 et l'échelle d'origine A^{∞} et d'unité A_1A. Les champs de ces deux échelles ne peuvent avoir d'éléments communs. On note de plus que si D est un élément appartenant au champ de la seconde échelle, le segment AD est infiniment grand relativement à AA_1. On peut se demander s'il y a entre A et A^{∞} des éléments n'appartenant pas aux champs de ces deux échelles. D'autre part, en prenant l'échelle d'origine A et d'unité AA^{∞} et en appliquant l'hypothèse III, on voit qu'il existe un élément B^{∞} hors du champ de l'échelle d'origine A et d'unité AA^{∞}. Il est donc nécessaire de définir des « ordres d'infinité ». Afin de répondre à ces questions, Veronese pose une nouvelle hypothèse :

> Hypothèse IV. Dans le champ à l'infini respectivement à une unité (AA_1) quelconque, si l'on choisit un élément arbitraire $A^{(\infty)}$, il existe dans le segment $(AA^{(\infty)})$ 1° : un élément X tel que (AX) et $(XA^{(\infty)})$ sont aussi infinis relativement à (AA_1) ; 2° : il existe un élément $A^{(\infty)}$ tel que quel que soit X [satisfaisant à la condition 1°] le segment (AX) est fini respectivement à $(AA^{(\infty)})$. (*ibidem*, p. 92).

La première partie de cette hypothèse assure qu'il existe entre A et A^{∞} un élément X hors des champs des deux échelles. La seconde partie revient à dire qu'il existe un élément A^{∞} tel que pour tout X entre A et A^{∞} situé hors du champ des deux échelles, les segments AX et AA^{∞} sont relativements finis ; Veronese démontre alors que XA^{∞} et AA^{∞} sont aussi relativement finis. De plus, AX satisfait à la seconde partie de l'hypothèse et tous les segments AA^{∞} satisfaisant à celle-ci sont finis entre eux. Ces segments constituent ainsi les premiers segments à l'infini ; Veronese les appelle « infinis de 1^er^ ordre » relativement à AA_1.

En répétant l'hypothèse IV, on définit successivement des infinis de 2^ème^, 3^ème^, n^ème^ ordre relativement à AA_1.

Veronese peut alors définir un système de nombres transfinis de la façon suivante : aux points A_1, A_2, ..., A_n de la première échelle correspondent les nombres naturels. Il attribue ensuite à un élément infini de 1^er^ ordre arbitraire A^{∞_1} le nombre ∞_1. En reportant à partir de A^{∞_1} d'un côté ou de l'autre l'unité AA_1, on obtient des points qui correspondent aux nombres $\infty_1 - 1$, $\infty_1 - 2$, ... ou $\infty_1 + 1$, $\infty_1 + 2$, ...

Aux éléments de l'échelle d'origine A et d'unité AA^{∞_1} correspondent les nombres ∞_1, $2\infty_1$, $3\infty_1$, ...

Veronese convient de dire que le segment AA^{∞_1} contient ∞_1 fois le segment AA_1.

Il choisit ensuite un élément à l'infini de 2^ème^ ordre arbitraire A^{∞_2}. En supposant par convention que le segment AA^{∞_2} contient ∞_1 fois le segment AA^{∞_1}, il attribue au segment AA^{∞_2} le nombre ∞_1^2, supposé égal à $\infty_1 \infty_1$.

On obtient d'une manière plus générale des nombres de la forme

$$\infty_1^m n \pm \infty_1^{m\pm1} n_1 \pm ... \pm \infty_1 n_{m\pm1} \pm n_m$$

Ces nombres sont appelés « infinis d'ordre fini ». Ils peuvent être additionnés ou multipliés comme des polynômes à coefficients entiers.

§ 4 Comparaison avec les nombres ordinaux de Cantor

Après avoir exposé son système de nombres, Veronese se livre à une comparaison avec ceux de Cantor. Il montre quelles sont les hypothèses à poser pour obtenir les nombres ordinaux de ce dernier :

> 90. Hypothèse I. Il existe un système Σ à une dimension dans lequel il y a toujours un segment identique à un segment quelconque (AB) dont la première extrémité est un élément quelconque X du système Σ.
>
> Observation I. Il ne résulte pas de ces hypothèses qu'il y a toujours un autre segment égal à (AB) dans le sens du système Σ dont la seconde extrémité soit X, comme le suppose l'hypothèse II.
>
> Avec l'hypothèse précédente nous pouvons construire une échelle et nous pouvons donc poser l'hypothèse suivante :
>
> Hypothèse II. Le champ de l'échelle d'un système Σ détermine un premier élément au dehors de celui-ci dans le sens de l'échelle. (*ibidem*, p. 102).

Ces deux hypothèses conduisent à admettre un premier nombre infini ω ; s'il est possible de considérer le nombre ω + 1, il n'y a en revanche pas de nombre ω -1. Il s'agit là d'une différence importante entre les systèmes de Veronese et de Cantor.

La correspondance de Cantor comporte quelques lettres à Veronese, qui datent de la période de rédaction des *Fondamenti.* On voit que Cantor a d'abord tenté de décourager Veronese d'adopter les idées défendues par Stolz et du Bois-Reymond. Ainsi, dans une lettre du 7 septembre 1890, il écrit :

> M. Stolz[21]. ne pouvait pas porter un coup au coeur plus rude à ses prétendues « grandeurs infiniment petites » lorsqu'il a affirmé qu'elles ne se laissent pas multiplier par ω Une grandeur linéaire absolue, qui doit être réelle et qui malgré tout ne se laisse pas multiplier de façon illimitée (même avec des multiplicateurs transfinis) n'est en aucun cas une grandeur, et s'il nomme, pour son usage privé ou celui de du Bois Reymond, ces absurdités (se contredisant elles-mêmes et se tenant là sans aucune application et utilité) grandeurs, la science ne pourra pas le suivre. On peut, pour des buts privés, s'occuper aussi bien de cercles carrés ou d'ellipses hyperboliques que de grandeurs infiniment petites actuelles ; tant qu'on ne sort pas avec de son bureau, personne n'opposera un obstacle à ces passions. J'appelle de telles occupations Signisticismus (jeu de signes). (1991, 5, p. 327).

Après avoir pris connaissance des idées de Veronese, Cantor lui répondit le 13 novembre 1890 :

> Le contenu de votre lettre du 10 novembre m'indique sans aucun doute que vous êtes parvenu par une extension arbitraire, forcée, et par là infondée, de faits ressortant du domaine du fini au transfini, à des conceptions sur les nombres transfinis, qui contredisent absolument les miennes. Vous dites vous-même : « Chez moi il n'y a pas un premier nombre infini... Voilà la différence essentielle entre votre nombre ω et mon nombre ω_1. »
>
> Nous serons en tout cas complètement d'accord sur le fait que ces théories opposées ne peuvent pas être toutes les deux vraies. (*ibidem*, p. 329).

La position de Cantor est particulièrement étroite et évoque celle des opposants à la géométrie non euclidienne. Une autre lettre à Veronese du 17 novembre 1890 montre que l'idée qu'on puisse poser des hypothèses en arithmétique choque Cantor :

---

[21] Cantor fait allusion ici à l'article de Stolz [1888,21, p. 603]. Dans la phrase qui suit, Cantor résume sa « preuve « de l'impossibilité des grandeurs infiniment petites.

> Vous croyez au contraire, à la manière des métagéométres Riemann, Helmholtz et consorts, pouvoir aussi poser des hypothèses en arithmétique, ce qui est tout-à-fait impossible ; c'est là que réside votre malheureuse aussi bien que fatale illusion, dont je ne peux vous détourner. (*ibidem*, p. 330).

Dans une dernière lettre du 26 novembre 1890, Cantor réexpose encore une fois ces idées. La correspondance avec Veronese ne semble pas s'être poursuivie au delà de cette date. Dans une lettre à Killing du 5 avril 1895 [1991, 5, p. 329], Cantor critique vivement le livre de Veronese et réaffirme que ses nombres transfinis ne reposent pas sur des hypothèses mais sont, comme les nombre entiers, « nécessaires et libres de tout arbitraire » .

Il convient de relever, que sur ces questions, la position de Veronese est beaucoup plus moderne que celle de Cantor. En effet après avoir comparé son système à celui de Cantor, il écrit :

> Ayant choisi l'un de ces systèmes, les autres ne sont naturellement pas compatibles avec celui-ci. Mais celà ne signifie pas que si l'un est possible, les autres soient en eux-mêmes faux. (1891, 24, p. 103).

Les raisons qui conduisent Veronese à préférer son système de nombres à celui de Cantor sont explicitées un peu plus loin. Il faut que la droite conserve ses propriétés dans le domaine infini :

> Avec l'hypothèse inverse de Cantor selon laquelle les points à l'infini de la droite sont représentés par les nombres ω, ω + 1, etc.. [...] la droite ne conserve pas dans le domaine des points à l'infini son homogénéité et à l'intérieur de ce de domaine les propriétés qui dérivent de l'expérience ne peuvent être conservées. (*ibidem*, p. 105).

§ 5 Extension du système des nombres transfinis

J'ai montré au § 3 que l'hypothèse IV pouvait être répétée autant de fois que l'on voulait. Est-il aussi possible de définir des nombres transfinis d'ordre infini ? Avant de répondre à cette question, Veronese démontre le théorème suivant :

> Il n'y a pas un premier segment infini d'ordre ω ; il n'y a pas non plus un champ de segments limités, par exemple $(AA^{(\infty_1^\omega)})$, d'ordre ω, s'il doit y avoir un élément X tel que (AX) et $(XA^{(\infty_1^\omega)})$ soient finis relativement à $(AA^{(\infty_1^\omega)})$; mais on peut appliquer l'hypothèse IV de détermination des segments infinis dans la forme fondamentale un nombre infini de notre série. (*ibidem*, p. 104).

La démonstration du premier énoncé est simple. Le deuxième énoncé revient à dire qu'il n'existe pas un champ d'éléments qui soit de premier ordre, au sens de l'hypothèse V, par rapport à l'ensemble des champs à l'infini d'ordre fini. J'avoue ne pas avoir réussi à comprendre la démonstration de Veronese. La difficulté vient, me semble-t-il, du fait qu'il ne précise pas clairement quelles seraient les propriétés d'un premier champ d'ordre infini.

Voici la démonstration du troisième énoncé :

> Pour démontrer la 3ème partie on observe que dans un segment $(AA^{(\infty_1^{\infty_1})})$ on peut toujours choisir un élément X tel que (AX) et $(XA^{(\infty_1^{\infty_1})})$ soient finis respectivement à $(AA^{(\infty_1^{\infty_1})})$ par la propriété même du nombre ∞_1 parce que le segment $(AA^{(\infty_1^{\infty_1})})$ est infini de 1er ordre relativement au segment $(AA^{(\infty_1^{\infty_1 \pm 1})})$ et les segments infinis de 1er ordre relativement à un segment donné satisfont à l'hypothèse IV.
>
> Observation VII. Appliquer l'hypothèse IV un nombre ∞_1 de fois est l'opération qui s'effectue pour obtenir à partir de (AA_1) l'unité $(AA^{(\infty_1^{\infty_1})})$. Elle a donc un sens déterminé. (*ibidem*, p. 105).

Cette démonstration ne prouve rien ; Veronese suppose en effet l'existence d'un segment $AA^{({\infty_1}^{\infty_1})}$ infini d'ordre 1 relativement à un segment $AA^{({\infty_1}^{\infty_1 \pm 1})}$. On ne voit donc pas quel est le « sens déterminé » de l'opération décrite. Il me semble que Veronese utilise déjà ici l'hypothèse V, formulée après ce théorème :

> Hypothèse V. Chaque segment infini qui n'est pas déjà d'ordre fini m s'obtient en appliquant le principe de l'hypothèse IV un nombre de fois infini déjà obtenu ou un nombre de fois infini qui s'obtient à partir des nouveaux segments ainsi construits. (*ibidem*, p. 106).

Veronese ajoute une remarque, qui éclaire ses intentions :

> L'hypothèse V exclut l'existence de segments (AA^{∞}) qui ne s'obtiennent pas au moyen de l'application répétée de l'hypothèse IV [...]. (*ibidem*, p. 106).

Les termes utilisés par Veronese prêtent à confusion. Qu'entendre en effet par « application répétée » de l'hypothèse IV ? S'agit-t-il d'une récurrence, auquel cas la répétition ne peut conduire qu'à des segments infinis d'ordre fini ? Ce qui compte en fait pour Veronese, c'est que chaque champ soit d'ordre 1 par rapport à un champ précédent. Ainsi, dans la mesure où il n'y a pas de premier champ à l'infini d'ordre infini, il faut supposer l'existence d'une première série de champs infinis d'ordre $\infty_1 + 2$, $\infty_1 + 1$, ∞_1, $\infty_1 - 1$, $\infty_1 - 2$, ... tels que chacun est d'ordre 1 par rapport au précédent.

En choisissant dans le champ d'ordre ∞_1 un élément A^{∞_1}, on peut attribuer au segment AA^{∞_1} le nombre ${\infty_1}^{\infty_1}$. On peut de même introduire des nombres de la forme ${\infty_1}^{\infty_1 \pm n}$.

L'hypothèse autorise plus généralement la considération de champs d'ordre $\infty_1^m n \pm \infty_1^{m\pm1} n_1 \pm ... \pm \infty_1 n_{m\pm1} \pm n_m$, puis de champ d'ordre ${\infty_1}^{\infty_1^m} \pm n$, de champs d'ordre ${\infty_1}^{\infty_1^{\infty_1^m}} \pm n$, etc...

En choisissant un élément A^{∞} dans chacun de ces champs, on peut attribuer au segment AA^{∞} un nombre transfini. Veronese obtient ainsi un ensemble de nombres transfinis qu'il appelle, sans doute à l'exemple de Cantor, « nombres de la classe (II) ». Il démontre en effet que ses nombres de la classe (II) ont la même puissance que les nombres de la classe (II) de Cantor.

Veronese établit encore la convention suivante :

> Nous dirons en outre que le segment (AA_η), η étant un nombre déterminé de la classe (II) tel que (AA_η) représente le nombre η relativement à l'unité (AA_1) et à l'origine A, contient η segments consécutifs dans le même sens égaux à (AA_1), sans pour autant que nous puissions les représenter comme ayant successivement une extrémité commune, c'est-à-dire sans sauts dans la représentation, comme il arrive par exemple à partir des segments (AA_1), (A_1A_2) , (A_2A_3), ... (A_nA_{n+1}) jusqu'au segment ($A_{\infty_1 \pm n}A_{\infty_1 \pm n+1}$). (*ibidem*, p. 108).

Avec cette convention, il est alors possible d'énoncer le résultat suivant, qui constitue une généralisation de l'axiome d'Archimède :

> Si l'on se donne deux segments (AB) < (CD) quelconques, il y a toujours un nombre fini ou infini déterminé η tel que : $(AB)\eta \underset{\equiv}{>} (CD)$ de tel sorte que $(AB)\eta$ est fini respectivement à (CD). (*ibidem*, p. 111).

§ 6 Hypothèses de continuité ; nouvelle extension du système

Il faut noter que jusque ici le système identique dans la position de ses parties n'a pas été supposé partout dense. L'hypothèse IV assure cependant que les éléments à l'infini de 1er ordre relativement au segment AA_1 forment un système partout dense. Soit en effet A^∞ l'un de ces éléments ; il existe entre A et A^∞ un élément X tel que AX et XA^∞ soient finis relativement à AA^∞. Comme X satisfait aussi à la seconde partie de l'hypothèse IV, on peut trouver un élément X_1 entre A et X jouissant de la même propriété. Un segment contenant au moins un infiniment petit de 1er ordre est donc partout dense. Veronese choisit d'appeler désormais « unité de mesure » un tel segment. Un segment variable fini (relativement à l'unité de mesure) devient « indéfiniment petit relativement à l'unité de mesure » s'il devient plus petit que n'importe quel segment fini. Veronese pose alors une première hypothèse de continuité :

> Hypothèse VI. Chaque segment ayant des extrémités variables en sens opposé et qui devient indéfiniment petit [relativement à l'unité de mesure] contient un élément en dehors du champ de variabilité de ses extrémités. (*ibidem*, p. 128).

On retrouve ici l'hypothèse donnée dans [1890, 23]. Elle revient à définir la continuité à l'intérieur d'un champ seulement ; Veronese parle donc de continuité « relative ». Remarquons que l'élément limite n'est pas unique car l'unité contient un infiniment petit d'ordre 1.

Les hypothèses IV et V indiquent comment étendre le système en direction de l'infiniment grand. Il n'y a cependant pas de raison de se limiter à l'infiniment grand et une extension en direction de l'infiniment petit est naturelle. C'est l'objet de l'hypothèse VII :

> Hypothèse VII. Le segment (AB) qui a servi à construire la première échelle contient des infiniment petits du même ordre que chaque autre segment limité de la forme fondamentale plus grand que (AB). (*ibidem*, p. 147).

Il n'y a donc pas un dernier ordre d'infiniment petits. Veronese démontre facilement que tous les segments satisfont à l'hypothèse. Celle-ci permet d'introduire un système de nombres infiniment petits, de la forme $\frac{1}{\infty_1^{\mu}}$ où μ est un nombre de la classe (II).

Veronese introduit enfin une seconde hypothèse de continuité :

> Hypothèse VIII : Chaque segment (XX') dont les extrémités sont variables en sens opposé et qui devient indéfiniment petit au sens absolu [plus petit que n'importe quel segment] contient un élément hors du champ de variation de ses éléments. (*ibidem*, p. 150).

On voit immédiatement qu'il n'y a qu'un élément dans le segment (XX') qui satisfait à l'hypothèse. Un système vérifiant celle-ci est appelé « continu absolu » .

§ 7 Prolongements de la théorie

Inspirée par des exemples fonctionnels, les infinis de fonctions de du Bois-Reymond et les moments de fonctions de Stolz, la théorie de Veronese revêt une forme géométrique. L'introduction de nombres transfinis tend cependant à en faire à certains endroits une théorie numérique ; ceci est particulièrement manifeste au moment où apparaissent les nombres transfinis d'ordre infini.

Les commentateurs n'ont retenu que l'aspect numérique de cette théorie et ont passé sous silence l'intuition géométrique qui en est à l'origine[22] ; je rappelle à cet égard que l'une des raisons essentielles est pour Veronese la nécessité de conserver à la droite ses propriétés dans le domaine infini.

Les idées de Veronese ont été reprises de façon algébrique par Tullio Levi-Cività [1892-93, 15]. Son système de nombres « monosemi » constitue une généralisation des nombres infinis ou infiniment petits d'ordre fini. Un nombre « monosemo » se présente sous la forme a_ν avec a et ν réels ; a est la caractéristique du nombre, ν son indice. Si a est nul, a_ν est nul quel que soit l'indice ν. Si a n'est pas nul, deux nombres sont égaux si et seulement si la caractéristique et l'indice sont égaux. De plus, si $\nu > \mu$, $a_\nu > b_\mu$ quels que soient a et b. Si $\nu = \mu$, $a_\nu > b_\nu$ si $a > b$. On reconnaît dans l'indice ν l'ordre d'infinité du nombre.

Dans un article ultérieur, Levi-Cività a mis en évidence les caractéristiques et les avantages de sa méthode par rapport à celle de Veronese :

> Le caractère éminemment abstrait des concepts de Veronese et la forme insolite d'intuiton géométrique dont il sut les revêtir furent certainement à l'origine des divergences. Je me flatte du fait que mes observations de caractère exclusivement arithmétique paraîtront exemptes de toute difficulté et contribueront à faire cesser le malentendu, en mettant en lumière par une autre voie le sens précis des hypothèses géométriques du professeur Veronese. (1898, 16, p. 92).

A la fin du XIX^{e} siècle, le champ de la géométrie est encore restreint. Beaucoup de mathématiciens ou de philosophes continuent à penser que les axiomes géométriques expriment des « faits d'intuition ». « L'insolite forme d'intuition géométrique » requise par l'hypothèse non archimédienne a donc dû constituer un problème pour bon nombre de lecteurs. De ce point de vue, une approche purement numérique comme celle de Levi-Cività offre l'avantage d'éviter des problèmes épistémologiques ; elle est de plus techniquement simple.

Aux difficultés relevées ci-dessus, il faut ajouter celles occasionnées par le style à la fois prolixe et souvent obscur de Veronese ; on s'étonne qu'il ait pensé faire une exposition « élémentaire » de la géométrie. Aujourd'hui encore, certaines parties de son ouvrage restent difficilement compréhensibles.

BIBLIOGRAPHIE

1. Cantor Georg, Über die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen, *Mathematische Annalen*, Leipzig, 1872, 5, p. 123-132 ; *Gesammelte Abhandlungen*, 1932, p. 92-101.
2. Cantor Georg, *Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre*, Leipzig, 1883 ; *Gesammelte Abhandlungen*, 1932, p. 165-204.
3. Cantor Georg, Mitteilungen zur Lehre vom Transfiniten, *Zeitschrift f. Philos. u. philos. Kritik*, 1887, 91, p. 81-125 et 1888, 92, p. 240-265 ; *Gesammelte Abhandlungen*, 1932, p. 378-439.
4. Cantor Georg, Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre, *Mathematische Annalen*, Leipzig, 1895, 46, p. 481-512 et 1897, 49, p. 207-246 ; *Gesammelte Abhandlungen*, 1932, p. 282-351.
5. Cantor Georg, *Briefe*, herausgegeben von Herbert Meschkowski und Winfried Nilson, Springer, 1991.
6. Dedekind Richard, *Stetigkeit und irrationale Zahlen*, 1872 ; *Gesammelte mathematische Werke*, 1932, vol. 3, p. 315-334.
7. Dedekind Richard, *Was sind und was sollen die Zahlen?*, 1888 ; *Gesammelte mathematische Werke*, 1932, vol. 3, p. 335-390.

[22] C'est par exemple de le cas d'Arthur Schönflies [1906,18].

8. Du Bois-Reymond Paul, Sur la grandeur relative des infinis des fonctions, *Annali di matematica pura ed applicata*, 1870-71, (2) 4, p. 338-353.
9. Du Bois-Reymond Paul, *Die allgemeine Functiontheorie*, Tübingen, 1882 ; traduction française de Gaston Milhaud, 1887 ; réédition, Paris, 1995, Jacques Gabay.
10. Fisher Gordon, The Infinite and Infinitesimal Quantities of du Bois-Reymond and Their Reception, *Archive for History of Exact Sciences*, 1981, 24, p. 101-163.
11. Grassmann Hermann, *Die lineale Ausdehnungslehre*, Leipzig, 1844 ; traduction française de Dominique Flament et Bernd Bekemeier, Paris, Blanchard, 1994.
12. Hardy Godefrey Harold, *Orders of Infinity, The « Infinitärcalcül » of Paul Du Bois-Reymond*, Cambridge, 1910 ; réédition, Hafner, New York, 1971.
13. Hölder Otto, Die Axiome der Quantität und die Lehre vom Mass, *Berichte über die Verhandlungen der Königlich Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig*, 1901, 53, p. 3-64.
14. Klein, F. *Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert,* t.1, Berlin, 1926, XIII + 385 p.
15. Levi-Cività Tullio, Sugli infiniti ed infinitesimi attuali quali elementi analitici, *Atti del reale Istituto veneto*, 1892-93, (7) IV b, p. 1765-1815.
16. Levi-Cività Tullio, Sui numeri transfiniti, *Rendiconti della reale accademia dei Lincei*, Roma, 1898, (5) 7^1, p. 91-96 et p. 113-121
17. Peano Giuseppe, *Arithmetices Principia nova methodo exposta*, Torino, 1889 ; *Opere scelte*, Roma, 1958, vol. II, p. 20-55.
18. Schönflies Arthur, Über die Möglichkeit einer projektiven Geometrie bei transfiniter (nichtarchimedischer) Maßbestimmung, *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, 1906, 15, p. 26-41.
19. Stolz Otto, Zur Geometrie der Alten, insbesondere über ein Axiom des Archimedes, *Mathematische Annalen*, Leipzig, 1883, 22, p. 504-519.
20. Stolz Otto, *Vorlesungen über Allgemeine Arithmetik*, Leipzig, 1885.
21. Stolz Otto, Über zwei Arten von unendlich kleinen und von unendlich grossen Grössen, *Mathematische Annalen*, Leipzig, 1888, 31, p. 601-604.
22. Stolz Otto, Über das Axiom des Archimedes, *Mathematische Annalen*, Leipzig, 1891, 39, p. 107-112.
23. Veronese Giuseppe, Il continuo rettilineo e l'assioma V d'Archimede, *Atti della R. Accademia dei Lincei, Memorie della Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali*, Roma, 1890, (4) 6, p. 603-624.
24. Veronese Giuseppe, *Fondamenti di geometria a più dimensioni ed a più spezie di unità rettilinee esposti in forma elementare*, Padova, 1891, xlvii+628p. ; traduction allemande de A. Schepp, Leipzig, 1894, xlvii+710 p.
25. Veronese Giuseppe, Intorno ad alcune osservazioni sui segmenti infiniti e infinitesimi attuali, *Mathematische Annalen*, Leipzig, 1896, 47, p. 423-432.