L'ARITHMETISATION DES GRANDEURS GEOMETRIQUES CHEZ STEVIN

Guillermina WALDEGG (Mexique)

RÉSUMÉ : Le changement qui a eu lieu au XVI^{e} siècle dans le concept de nombre, survenu à partir de l'unification du traitement des quantités discrètes et continues, n'a été possible que grâce à une profonde transformation des méthodes et des critères de construction, et de validation, des objets mathématiques. Les travaux théoriques de Simon Stevin (1548-1620) ont contribué, de façon primordiale, à la réalisation d'une telle transformation, produisant une rupture tant épistémologique que méthodologique avec la mathématique ancienne.

Nous analysons les arguments que Stevin utilise dans son ouvrage, *L'Arithmétique*, pour démontrer les propositions qui sont dérivées de sa conception de nombre ; nous montrons également qu'il existe une extrapolation des propriétés des grandeurs géométriques aux objets numériques, ce qui est utilisé par Stevin comme fondement des nouveaux nombres.

INTRODUCTION

Simon Stevin (1548-1620) est connu dans l'histoire des mathématiques comme étant « l'inventeur des fractions décimales ». Cependant, Stevin n'est ni le créateur, ni même le divulgateur de la notation décimale. Beaucoup de mathématiciens, aussi bien antérieurs que contemporains de Stevin (Viète, par exemple) ont utilisé les fractions décimales au lieu des fractions sexagésimales plus répandues dans les travaux scientifiques de l'époque[1]. Par ailleurs, on sait que les fractions décimales n'ont été adoptées de façon généralisée que longtemps après la parution des ouvrages de Stevin sur le sujet[2]. Une question surgit naturellement : quelle est la véritable contribution de Stevin dans l'introduction et dans le développement des fractions décimales ?

L'existence de travaux sur la notation décimale autres que ceux de Stevin vise à diminuer l'impact de cette innovation ; toutefois, ces travaux ne concernent qu'un problème de notation. La vraie contribution de Stevin est, avant tout, un apport conceptuel : il a profondément modifié le concept de nombre. Les « fractions décimales » avant Stevin étaient de simples conventions de notation, des abréviations pour mieux construire les tables numériques. L'introduction d'une vraie fraction décimale dont la notation s'appuie clairement sur le caractère décimal du système numérique, enrichissant sensiblement les opérations numériques de base, est en définitive une contribution de Stevin. Celui-ci a compris que le concept de nombre joue un rôle central dans l'établissement de la notation décimale ; il a identifié aussi le besoin d'incorporer l'unité dans ce concept afin de donner aux fractions un fondement théorique. Beaucoup d'historiens ont diminué la contribution de

[1] Cajori (1928), 314-335 ; Sarton (1935), 162-174.
[2] Sarton (*op. cit.*), 168, n .20.

Stevin en négligeant la différence entre l'innovation notationnelle, fondée sur les conventions, et l'innovation basée sur un changement conceptuel. La première est un accident, la deuxième est délibérée et a le caractère de nécessité.

NOMBRE ET GRANDEUR DANS LA MATHEMATIQUE GRECQUE

L'héritage Aristotélicien

Le principal obstacle auquel Stevin doit faire face lors de l'introduction de sa notation décimale est un concept de nombre excluant aussi bien l'unité que les fractions de l'unité ; il s'agit du concept grec de nombre, encore en vigueur dans les démarches théoriques du XVI[e] siècle. Afin de mieux apprécier l'étendue du changement proposé par Stevin, il convient de rappeler le concept de nombre dans la mathématique grecque.

Aristote définit la quantité comme « *Ce qui est divisible par deux ou par plus de parties aliquotes*» [*Métaphysique* 1020[a], 5]. La division est l'opération qui permet d'identifier les quantités et elle est à la base de la classification qu'il propose : si la quantité est *discrète* – et donc dénombrable –, il s'agit d'un *nombre* ; par contre, si la quantité est *continue* – et donc mesurable –, il s'agit d'une grandeur. Un nombre est une quantité qui ne peut être divisée qu'une finitude de fois, l'unité se trouvant à la limite d'une telle division. Une grandeur est une quantité qui peut être divisée indéfiniment sans perdre son essence ; dans ce dernier cas, la division n'est pas bornée, ce qui veut dire qu'il n'existe pas d'unité « naturelle » de mesure.

Les nombres et les grandeurs constituent des classes disjointes et indépendantes et, par conséquent, leurs études respectives sont différentes et irréductibles. D'après la tradition platonique, la Géométrie étudie les grandeurs, l'Arithmétique les nombres. Ces deux sciences n'ont en principe aucune liaison, sauf s'il s'agit de grandeurs commensurables. Dans ce cas il est possible d'utiliser aussi bien les résultats de l'Arithmétique que ceux de la Géométrie, parce que « *les grandeurs commensurables peuvent être conçues comme des nombres* » [Aristote, *Analytiques Postérieures*, 75[b], 5].

Nombre et grandeur chez Euclide

Euclide soutient aussi la séparation entre l'Arithmétique et la Géométrie proposée par Platon et Aristote. Dans *Les Éléments*, les livres concernant les nombres (7, 8, 9 et 10) sont complètement indépendants des livres géométriques : jamais, dans un même livre, les mots *nombre* et *grandeur* n'apparaissent ensemble, à l'exception de la proposition 5 du Livre 10, où Euclide énonce la propriété qu'ont les grandeurs commensurables de se comporter « comme les nombres » :

> Proposition X.5 : Les grandeurs commensurables ont la même raison que deux nombres

Le domaine numérique grec a une structure d'origine dérivée de la façon de générer la série numérique et d'opérer avec ses éléments à partir d'un référent externe. Une fois déterminée la nature des concepts, en tant que reflet d'une réalité physique externe, la méthodologie à utiliser pour opérer est définie.

Le rôle de l'unité et le domaine numérique

L'*unité*, principe générateur du nombre, est le concept qui résulte de l'extraction des « choses » (de chaque chose) les caractéristiques qui concernent exclusivement leur singularité. Il s'ensuit que du point de vue grec, il soit impossible de diviser l'unité sans qu'elle perde son essence - de la même façon qu'une chose singulière (un homme, un cheval) ne peut être divisée sans perdre son essence.

C'est l'impossibilité de diviser l'unité numérique qui détermine l'essence de la quantité discrète telle que définie par Aristote : les subdivisions d'une quantité discrète ne peuvent pas continuer au-delà de l'unité et, par conséquent, il n'est pas possible d'effectuer un nombre infini de ces divisions. L'unité est le principe générateur du nombre et son indivisibilité est sa principale caractéristique.

Cette conception limite le domaine numérique grec, par nécessité logique, à celui des nombre naturels (les nombres utilisés pour compter). Le zéro et les expressions fractionnaires en sont exclus. Il y a donc une différence claire entre compter et mesurer.

Certes, il y a dans l'Arithmétique grecque un traitement des raisons numériques que nous identifions aujourd'hui comme étant « les nombres rationnels ». Ces raisons ne sont pourtant pas définies comme des nombres, mais comme des comparaisons entre nombres. Ces comparaisons peuvent être rendues explicites parce qu'elles existent, dès lors que les nombres existent.

Les grandeurs chez les Grecs

Les grandeurs géométriques, prototype des quantités continues, constituent un domaine hétérogène. Longueurs, aires et volumes appartiennent à ce domaine. Ces grandeurs partagent la propriété d'être potentiellement divisibles *ad infinitum*, ainsi que les méthodes pour établir entre elles (si elles sont de la même espèce) des raisons et des proportions. Néanmoins, on ne peut pas identifier de structure regroupant toutes les grandeurs, analogue à celle du domaine numérique. Les segments, par exemple, constituent un ensemble d'éléments abstraits, isolés et indépendants. Il est possible d'opérer avec deux segments donnés : de les comparer, de les ordonner ; ce qui n'implique pas cependant une perte de leur individualité et, pour ainsi dire, de leur liberté. La ligne droite, dans la Géométrie grecque, fait partie de ces segments. Elle peut être prolongée indéfiniment, mais elle n'occupe pas le lieu privilégié qu'elle a dans notre Mathématique en tant que conteneur où tous les segments sont ordonnés et confondus rendant ainsi possible leur structuration.

Les comparaisons entre grandeurs en termes de raisons – un premier niveau qualitatif du processus de mesurer — donnent lieu à la classification des grandeurs en *commensurables* et *incommensurables*. Cependant, cette classification, ainsi que toutes celles qui résultent des comparaisons établies entre grandeurs, n'obéit pas à une définition de « classes d'équivalence ». Il s'agit en effet de relations binaires, c'est-à-dire, des relations établies en prenant seulement deux éléments à la fois.

L'opération de division est à l'origine de la définition de la commensurabilité et de la incommensurabilité : s'il est possible de trouver une grandeur finie capable de « mesurer » (c'est-à-dire, de diviser exactement) simultanément deux grandeurs données, ces deux grandeurs sont *commensurables.* Si, par contre, la recherche de cette « grandeur unité » produit des grandeurs de plus en plus petites dans un processus de division potentiellement infini, les grandeurs sont *incommensurables*. Dans le premier cas, quand les grandeurs sont commensurables, leurs raisons ont un comportement semblable à celui des raisons numériques. Par conséquent, elles peuvent être traitées en tant que telles suivant la proposition X.5 des *Éléments* énoncée plus haut. Si ce n'est pas le cas, il n'existe pas de liaison possible entre nombre et grandeur.

La mathématique grecque considère l'existence d'une grandeur unité non seulement nécessaire pour les pratiques de mesure, mais théoriquement indispensable pour la caractérisation commensurable — incommensurable. Une unité métrique ne peut pas avoir le statut de « absolue » qu'a l'unité arithmétique, puisque la première n'a pas de « réalité » externe. Choisir une grandeur unité équivaudrait à privilégier une grandeur avec des attributs imposés de l'extérieur et non pas « lus » sur la propre réalité ; l'élection d'une grandeur unité ne peut se faire indépendamment de l'activité du sujet.

Néanmoins, la grandeur unité qui résulte de la comparaison de deux grandeurs commensurables (leur « plus grand commun diviseur ») est une unité intrinsèque aux deux grandeurs comparées et donc indépendante du sujet qui fait la comparaison. Cette unité a les caractéristiques théoriques qu'impose la mathématique grecque, mais elle a l'inconvénient de ne pas être unique, puisqu'elle change lorsque les deux grandeurs à comparer changent.

NOMBRE ET GRANDEUR CHEZ STEVIN

Un concept unifié

À partir de la pratique de la mesure, Stevin identifie les propriétés communes aux nombres et aux grandeurs et propose un concept unifié de nombre.

L'ouvrage mathématique de Simon Stevin qui contient les plus importants apports théoriques à cette science s'intitule *L'Arithmétique,* un volume publié en français en 1585. Dans ce texte Stevin présente une extension du concept de nombre qui n'est possible qu'au dépens d'une rupture explicite avec la conception euclidienne. À l'aide de ce nouveau concept de nombre, Stevin cherche à donner des fondements théoriques aux procédures du calcul arithmétique, nécessaires à la représentation décimale qu'il vient de développer[3].

Stevin propose pour le concept de nombre un fondement théorique, extrait de l'expérience quotidienne et de la pratique professionnelle. Il s'agit d'une extension de l'activité généralisée de *mesurer,* c'est-à-dire d'une activité réalisée avec des grandeurs géométriques.

Pour donner ce fondement théorique aux activités mathématiques quotidiennes, il fallait chercher des mécanismes efficaces pour opérer les résultats des mesures ; des mécanismes qui, en plus, pourraient faire l'objet d'une formalisation suivant les préceptes grecs. Stevin traite l'aspect opératoire du problème dans *La Disme,* où il présente une systématisation, avec quelques innovations, de la notation décimale déjà connue à l'époque mais dont l'usage était loin d'être généralisé [Cf. Sarton, 1935]. Quant au deuxième point, Stevin développe, à partir de l'identification grandeur-nombre, le traité théorique de *L'Arithmétique* où il attribue des propriétés numériques aux quantités continues ainsi que des propriétés de continuité aux nombres.

L'opposition continu-discret

Contrairement à ce que l'on trouve dans la mathématique grecque, chez Stevin le nombre est associé à la quantité sans que l'opposition entre discret et continu fasse partie du concept. Stevin commence sa dissertation avec les définitions suivantes :

> Définition I : L'Arithmétique est la science des nombres [Stevin, 1585 p. 1].
>
> Définition II : Nombre est cela par lequel s'explique la quantité de chacune chose [Stevin ,1585 p. 1].

Cette dernière définition représente un vrai saut conceptuel par rapport à la mathématique grecque. Pour Aristote, le nombre est une quantité (ou une classe de

[3] La même année (1585), Stevin publie un bref fascicule intitulé *La Disme* traitant de la notation décimale et son arithmétique, qui inclut le traitement des fractions décimales.

quantités) tandis que, pour Stevin, le nombre est un moyen de rendre la quantité évidente. Pour les deux auteurs la quantité est un concept abstrait, dans un premier niveau de représentation, de certaines propriétés des objets matériels (leur « être quantitatif »). Aristote situe le nombre et la grandeur dans ce premier niveau. Stevin passe à un deuxième niveau de représentation où le nombre « parle » du niveau précédent.

Dès cette deuxième définition, Stevin supprime donc la dichotomie continu-discret en tant que propriété définissant la quantité. En effet, il nie explicitement que les nombres soient, dans leur essence, des quantités discrètes.

QUE NOMBRE N'EST POINT QUANTITÉ DISCONTINUE
[Stevin, 1585, p. 2[4]].

Le nombre en tant qu'entité isolée est, d'après Stevin, « continu » dans le sens aristotélicien, c'est-à-dire, qu'il est possible, dans la plupart des cas, de le diviser indéfiniment sans qu'il perde son essence ; à la limite, il hérite la propriété de continuité ou de discontinuité de la « chose » (sa quantité) qu'il quantifie. Par exemple, si l'on parle de *2* hommes, le *2* est discret parce que son référent concret – l'ensemble d'hommes – est discret ; tandis que si l'on parle de *2* kilomètres, le *2* est continu puisqu'il fait référence à une distance (ou à une longueur) continue. Désormais, continu et discret cessent d'être des catégories ontologiques. La discussion sur ce point s'éloigne du domaine des mathématiques, puisque le fait d'être continu ou discret dévient une propriété circonstancielle imputable uniquement aux objets quantifiés. Il s'agit ici d'un premier exemple de la façon dont Stevin joue à considérer les nombres en tant qu'extensions des grandeurs.

Le rôle de l'unité

Afin de gagner l'acceptation de son nouveau concept, Stevin reconnaît qu'il doit montrer la supériorité de sa définition par rapport à la définition traditionnelle. C'est ainsi qu'il commence son argumentation avec la affirmation suivante.

QUE L'UNITÉ EST UN NOMBRE [Stevin, p. 2[5]].

Stevin conteste le point de vue traditionnel selon lequel le 1 n'est pas un nombre mais le « principe » du nombre, de la même façon que le point est le principe du segment. Il élabore deux lignes d'argumentation : l'une est philosophique, l'autre pseudo mathématique. L'argumentation philosophique fait référence au caractère ontologique de l'unité :

> La partie est de mesme matiere qu'est son entier,
> l'unité est partie de multitude d'unitez,
> Ergo l'unité est de mesme matiere qu'est la multitude d'unitez ;
> Mais la matiere de multitude d'unitez est nombre
> Doncques la matiere d'unité est nombre [Stevin, p. 1].

Et qui le nie, continue Stevin, *fait comme celui qui nie qu'une pièce de pain soit du pain.*

D'autre part, l'argument pseudo mathématique est le suivant :

---

[4] En majuscules dans l'original.
[5] En majuscules dans l'original.

> Si du nombre donné l'on ne soubstraie nul nombre, le nombre donné demeure
> Soit trois le nombre donné, & du mesme soubstrayons un
> que n'est point nombre, comme tu veux.
> Doncques le nombre donné demeure, c'est-à-dire qu'il y restera encore trois, ce qui est absurde [Stevin, p. 1].

Stevin affirme que l'exclusion de l'unité du genre nombre dans la mathématique de l'antiquité est due à la volonté des anciens de trouver le « principe » ou la « cause »du nombre. Il reconnaît qu'il s'agît là de la méthode utilisée par les philosophes dans leurs discussions et ajoute que, dans le cas des grandeurs géométriques comme la longueur, l'aire et le volume, le principe évident est le « point ». C'est dans ce sens de « principe » que l'on cherche un principe pour le nombre. Stevin, plutôt que d'argumenter sur la pertinence de rechercher les *causes* dans un traité de mathématiques, accepte le défi philosophique et entreprend de faire une critique sur la solution donnée dans le passé. Une fois de plus, Stevin veut obtenir les propriétés des nombres en étendant les propriétés des grandeurs.

L'identification nombre-grandeur

Les nombres et les grandeurs, poursuit Stevin, ont tant de choses en commun qu'ils pourraient paraître presque identiques ; par conséquent, il y a quelque chose dans le nombre qui doit correspondre à ce que le point est aux grandeurs. Pour les Grecs, l'unité est le principe du nombre de même que le point est le principe de la grandeur et ceci, affirme Stevin, est à la source de toutes les difficultés [cf. Stevin, p. 2].

L'analogie proposée par les Grecs, selon Stevin, présente deux défauts fondamentaux : d'abord, l'unité est une partie du nombre tandis que le point n'est pas une partie de la droite[6]. Ensuite, l'unité est divisible mais le point ne l'est pas, comme Stevin le démontre dans la citation suivante :

> L'unité est divisible en parties (vray est qu'ils [les Anciens] les nient, mais mille leurs distinctions ne sont pas suffisantes, de pouvoir ainsi opprimer la nature du nombre, qu'elle ne manifeste par force son essence, es Arithmétiques opérations de plusieurs auteurs, comme entre autres par l'absolue partition de l'unité de la 33 question du 4 livre, & la 12, 13, 14, 15 questions du cinquième livre du Prince des Arithméticiens Diophante[7]) [Stevin, p. 2].

La raison de fond qui nourrit la conviction de Stevin sur le caractère numérique des nombres algébriques est la nature opératoire du nombre : tous les résultats des opérations qui se réalisent avec des nombres sont, à leur tour, des nombres[8], de la même façon que les opérations réalisées avec des grandeurs donnent lieu à d'autres grandeurs.

Ainsi, Stevin conclut que l'unité n'est pas au nombre ce que le point est au segment. Cependant, puisqu'il est convaincu que nombre et grandeur sont si semblables que « ils paraissent presque identiques » [Stevin, p. 2], la question suivante se pose : qu'est qu'il y a pour le nombre qui soit équivalent au point pour la droite ? Stevin répond :

> Je dit que c'est 0 (qui se le dict vulgairement Null, & que nous nommons commencement en la suivante 3 définition) ce que ne tesmoignent pas seulement leurs parfaictes & générales communautez, mais aussi leurs irréfutables effects [Stevin, p. 2].

---

[6] Euclide, dans sa définition du Livre I, suit l'analyse d'Aristote. Un point constitue la frontière d'un segment ou divise un segment en deux parties. Mais un segment n'est pas fait de points [Euclide, Livre I, Définition 3].

[7] Voir Heath (1964). Ces propositions sont nommées IV 31, V 9, 10, 11 y 12 : Elles commencent toutes avec la phrase : « pour diviser l'unité en deux parties (ou nombres)... » ou bien, « pour diviser l'unité en trois nombres ».

[8] Sur les arguments de Stevin en faveur du caractère opératoire du nombre, voir Waldegg 1993.

Les « communautés » que Stevin identifie entre le zéro et le point sont les suivantes :

- Point et zéro ne sont ni segment ni nombre (respectivement) mais ils y sont attachés.
- Ni le point ni le zéro ne peuvent être divisés en parties.
- Une infinité de points ne fait pas de segment de même qu'une infinité de zéros ne fait pas de nombre.
- Ajouter un point ou un zéro au segment ou au nombre (respectivement) n'accroît pas sa quantité.

Concernant cette dernière analogie, Stevin propose le raisonnement suivant :

> Mais si l'on concède que AB soit prolongée jusques au poinct C ainsi que AC soit une continue ligne, alors AB s'augmente par l'aide du poinct C ; Et semblablement si l'on concède que D 6 soit prolongé jusques en E 0, ainsi que DE 60 soit un continue nombre faisant soixante, alors D 6 s'augmente par l'aide du nul 0... [Stevin, p. 2].

De cette façon, la ressemblance est encore valable.

L'identification par l'opération

Le concept de nombre chez Stevin est édifié sur la constatation d'un isomorphisme opératoire entre nombres et grandeurs, c'est-à-dire, que le nombre se développe à partir de la considération selon laquelle il est possible d'opérer avec lui exactement de la même façon qu'avec les quantités continues. Nous trouvons ici la façon de valider les objets mathématiques qui domine l'argumentation stevinienne : les opérations définissent (et ainsi attribuent) l'existence des objets. Dans le cas qui nous intéresse, l'essence du nombre est définie par ses opérations.

Dans la citation que nous avons étudiée plus haut, Stevin, argumente en faveur de la division de l'unité en utilisant cette façon de valider l'existence des nombres ; il affirme que nier la divisibilité de l'unité revient à étouffer la nature du nombre, dont l'essence se manifeste par les opérations arithmétiques qu'on peut réaliser avec lui.

L'affirmation précédente confère au nombre une existence opératoire, c'est-à-dire que ce sont les opérations que nous pouvons réaliser sur les nombres qui déterminent leur nature ; de la même façon que ce sont les opérations que nous pouvons réaliser sur les grandeurs qui déterminent la nature des grandeurs.

Le problème de l'homogénéité

Un point d'inversion de l'isomorphisme opératoire entre nombres et grandeurs est atteint lorsque Stevin propose d'étendre les propriétés numériques, cette fois-ci des nombres aux grandeurs, et non des grandeurs aux nombres comme nous avons vu plus haut. Ce raisonnement apparaît dans la démarche vers l'ampliation du domaine numérique où l'on affirme que les résultats des opérations algébriques réalisées sur les nombres, sont à leur tour des nombres. Cette affirmation n'obéit pas aux règles grecques d'homogénéité des grandeurs. Chez les Grecs, il est interdit d'opérer avec des grandeurs dont la nature est différente ; ainsi, l'addition d'aires et de volumes ou de lignes et d'aires n'a pas de sens. De même, une grandeur de la quatrième puissance n'a pas non plus de signification. Dans la géométrie grecque, une grandeur de la première puissance représente un segment, une de la deuxième puissance, une surface, et une grandeur de la troisième puissance représente un volume ; en conséquence, il n'y a aucun besoin de puissances supérieures à trois.

Stevin, inspiré par la nature opératoire des nombres, ne trouve aucune difficulté à accepter : QUE NOMBRES QUELCONQUES PEUVENT être Nombres carrés, cubiques, & c. Aussi que racine quelconque est nombre [Stevin, 1585, p. 8, En majuscules dans l'original]. Dont la démonstration directe se base sur l'exposition des grandeurs géométriques qui représentent ce genre de nombres (nous reviendrons sur ce point plus tard). Cette affirmation conduit Stevin à définir un *nombre algébrique* comme étant une *quantité ou une multitude composée de quantités* [Définition XIX, p. 6], peu importe que les quantités en question portent une puissance supérieure à trois (ou inférieure à un) ou que leurs puissances soient différentes entre elles.

Afin de compléter le cadre qui élimine le problème d'homogénéité dimensionnelle, Stevin définit le polynôme (multinôme) algébrique :

> Multinomie algebraique est un nombre consistant en plusieurs diverses quantitez [Stevin, Définition XXVI, p. 6].

et il en donne un exemple :

> comme 3 ③ + 5 ② - 4 ① + 6 (0) s'appelle multinomie algebraique *[Ibidem]*

Le nombre sans adjectif

Stevin est convaincu que grâce à ses arguments, l'unité ne joue plus le rôle central dans l'analyse de la quantité. Le rôle spécial qu'Aristote donne à l'unité et qu'Euclide incorpore dans sa mathématique repose sur des arguments philosophiques. Ces arguments, à leur tour, sortent de la distinction qualitative entre nombre et grandeur en termes de continuité.

La définition du nombre d'Euclide (« *une multitude composée d'unités* ») fait penser davantage à « un nombre pur », de telle sorte que les rapports entre deux ou plusieurs nombres peuvent être conçus indépendamment des quantités auxquelles ils font référence ; par exemple, pour déterminer que le 10 est un nombre entier, pair, moitié de 20, double de 5, etc. il n'est pas nécessaire d'imaginer les quantités (la chose énumérée) que ces nombres représentent.

Un problème qui surgit au moment d'étendre la définition du nombre aux quantités continues est que, contrairement à ce que l'on trouve pour les quantités discrètes, il n'y a pas d' « unité naturelle » : on affecte un nombre à une grandeur au moyen d'une unité conventionnelle, à savoir, celle qui a été choisie comme unité de mesure. Dans ce cas, lorsqu'on opère sur les nombres identifiés aux quantités (continues et discontinues) il n'est pas clair si l'on opère sur des « vrais nombres », sur des symboles, ou sur les « quantités dénombrées », ce que Le Teneur reproche à Stevin [cf. Jones, 1978]. Le manque d'une unité naturelle entraîne une difficulté à débarrasser le nombre du contexte qui permet d'opérer sans avoir besoin de faire appel à la quantité correspondante. Conscient de cette difficulté, Stevin définit le nombre arithmétique comme étant celui qui s'obtient après abstraction de la quantité dont il provient :

> Définition IV : Nombre arithmétique est celuy qu'on explique sans adjective de grandeur [Stevin, Def. 4, p. 3].

Une grande partie du travail de Stevin dans *L'Arithmétique* est consacrée à montrer que le domaine des nombres est homogène, étant donné que les nombres sont indépendants de leur genèse et que, de cette façon, on peut opérer sur eux sans aucune référence aux quantités d'où ils proviennent. De sorte que, par exemple, le nombre 9, que nous pouvons imaginer comme étant associé à une quantité linéaire, peut être interprété aussi comme l'aire d'un carré, sans perdre ou modifier ses propriétés relationnelles par rapport aux autres nombres, ni même ses propriétés opératoires.

Il est clair que l'unité cesse d'avoir le caractère privilégié qu'elle a dans la mathématique grecque, en tant que principe générateur du nombre. C'est la raison pour laquelle Stevin doit renoncer à la possibilité d'avoir un principe de génération absolu ; dorénavant il sera toujours obligé de chercher un support en dehors des mathématiques, situé dans le contexte concret : la quantité de chaque chose.

Stevin, en ouvrant un si vaste spectre aux nombres, soulève les préoccupations suivantes : ces nouvelles entités sont-elles cohérentes avec la définition initiale de nombre? Représentent-elles vraiment des « quantités des choses »? Stevin se consacre donc à la tâche de montrer que, de la même façon qu'il y a un nombre pour chaque grandeur (résultat de sa mesure), il existe une grandeur pour chaque nombre. Pour y aboutir, Stevin a besoin de montrer que l'identification grecque qui restreint certaines grandeurs géométriques aux puissances d'un nombre (x^2 est une aire et x^3 un volume, sans aucune autre possibilité) n'est pas unique.

Un exemple de ce raisonnement est le suivant : supposons que nous avons un segment de longueur 2 (figure 1). Si nous dessinons un carré sur le segment, l'aire sera $2^2 = 4$ et si maintenant nous construisons un cube sur le carré d'aire 4, son volume sera $2^3 = 8$. Jusque là ce raisonnement coïncide avec le raisonnement grec : la première puissance est linéaire, la deuxième est carré et la troisième est cubique. Si maintenant nos empilons 2 de ces cubes, le volume du prisme résultant sera $2^4 = 16$ de sorte qu'on a conféré un sens géométrique à la quatrième puissance ainsi qu'à toutes les puissances suivantes [Cf. Stevin, pp. 4-5].

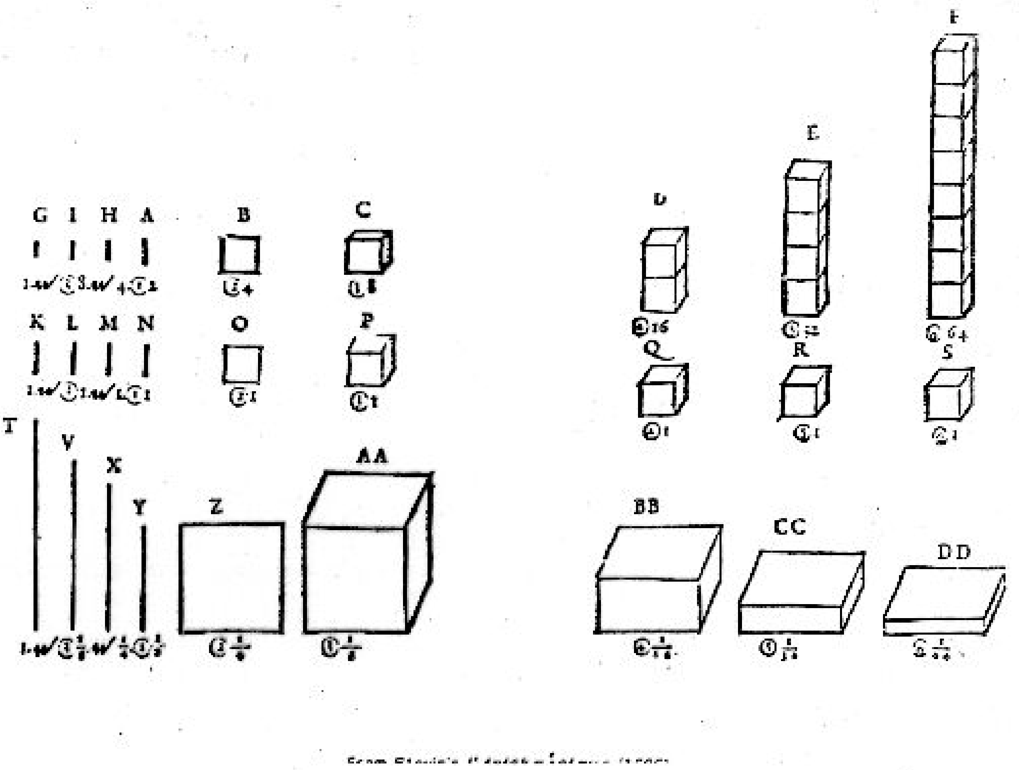

Figure 1

De la même façon, Stevin expose les grandeurs géométriques associées à des puissances de nombres fractionnaires. Par exemple, partons maintenant d'un segment de longueur 1/2 (voir figure 1) et construisons le carré correspondent qui aura une aire $(1/2)^2 = 1/4$, et le cube qui aura un volume $(1/2)^3 = 1/8$. En divisant le cube de moitié nous aurons un prisme dont le volume est $(1/2)^4 = 1/16$, de même que pour toutes les puissances fractionnaires suivantes [*Ibidem*].

Avec cette méthode, Stevin veut montrer qu'il est toujours possible de produire une grandeur qui représente un nombre donné, de la même façon qu'il est toujours possible d'exhiber un nombre associé à une grandeur donnée. À travers cette identification fonctionnelle, Stevin prétend apporter un fondement à l'homogénéité du domaine numérique et à la nature de son « nombre arithmétique ».

Nombres commensurables et incommensurables

Pour conclure, voyons un autre exemple de la façon dont Stevin étend les propriétés géométriques aux nombres qu'il vient de construire. Les définitions 37 et 38 font référence aux nombres commensurables et incommensurables ;

> Nombres commensurables sont ceux ausquels existe quelque nombre qui leur soit commune mesure [Def. XXXVII, p. 11].

> Nombres incommensurables sont ceux ausquels n'existe quelque nombre qui leur soit commune mesure *[...]* Comme 4 & $\sqrt{6}$[9], & autres semblables, par ce qu'il n'y a aucun nombre qui leur soit commune mesure, s'appellent nombres incommensurables [Def. XXXVII et Explication, p. 11].

Dans la tradition ancienne, la commensurabilité est un concept appliqué à *tous* les nombres et étendu plus tard aux grandeurs. C'est-à-dire, que les nombres possèdent la qualité de commensurabilité *par nécessité* lorsqu'ils sont définis comme des ensembles d'unités, tel que le fait Euclides dans *Les Éléments* :

> Définition VII–2 : Le nombre est une multitude composée d'unités

Dans ce système, une définition de « nombre commensurable » est superflue et redondante, et une définition de « nombre incommensurable » n'a aucun sens. Aucune de ces deux définitions n'auraient pu être inclue dans la mathématique grecque. Mais quand Stevin élargit le concept de nombre et le détache de tout rapport avec l'unité, les définitions 37 et 38 sont non seulement pertinentes mais nécessaires.

Après la définition 38, Stevin explique les concepts euclidiens de « commensurable et incommensurable en puissance » pour deux segments[10] en utilisant ses propres nombres et des binômes.

Un binôme peut appartenir à l'une de trois catégories : dans la première, les nombres qui forment le binôme sont tous les deux commensurables, par exemple $4 + 6$ ou $\sqrt{3} + \sqrt{12}$; dans la deuxième catégorie, les nombres sont incommensurables mais leurs carrés sont commensurables, comme $4 + \sqrt{7}$; et dans la dernière catégorie, les nombres et leurs carrés sont incommensurables, comme $4 + \sqrt{\sqrt{7}}$ (puisque leurs carrés 16 et $\sqrt{7}$ sont

---

[9]Notons que Stevin n'a aucune difficulté à comparer un nombre « linéal » avec un autre « radical ».

[10] Euclide, Definition X-2 : Deux segments sont commensurables en carré quand les carrés [construit] sur eux sont mesurés par une même aire, et incommensurables en carré quand il n'est pas possible d'avoir une aire commune pour les mesurer (Heath 2, p. 10).

incommensurables). Stevin refuse cette distinction pour les nombres incommensurables et il dit que :

> Mais selon mon opinion nous nommons ces différences plus clairement, disant absolument que tous deux nombres proposés sont commensurables ou incommensurables [Stevin, p. 11].

Ce que Stevin veut dire ici est que tous les binômes composés par des nombres incommensurables correspondent à la définition du nombre incommensurable et donc les distinctions d'Euclide ne sont pas nécessaires.

CONCLUSION

Il semble évident que, grâce au traitement des grandeurs géométriques parfaitement maîtrisé depuis la tradition grecque, Stevin réussit à donner au concept de nombre un fondement théorique consolidé. Un concept de nombre qui, paradoxalement, n'aura désormais plus besoin des grandeurs pour être expliqué. Ce concept déclenchera également le processus ininterrompu d'identification — rupture entre les quantités continues et discrètes, qui culmine à la fin du XIX^{e} siècle avec la construction des nombre réels de Dedekind.

Les démarches théoriques de Viète, Descartes et Fermat, qui ont apporté à la Mathématique de l'ère moderne son caractère analytique, sont héritières du concept stevinien de nombre. La pensée numérique a subi un changement conceptuel dramatique avec l'apport de Stevin.

BIBLIOGRAPHIE

Aristote, *The Great Books of the Western World*, vol. VIII, Encyclopaedia Britannica, Chicago 1978.

T.L. Heath, *Euclid. The Thirteen Books of the Elements*, Dover Publications., New York, 1956.

Heath, T. L. (1964) *Diophantus of Alexandria : A Study in the History of Greek Algebra* : Dover Publications., New York.

Jones, C. V., (1978), *On the concept of one as a number*, doctoral dissertation, University of Toronto.

Jones, C. V., (1987), "La influencia de Aristóteles en el fundamento de Los Elementos de Euclides", *Mathesis*, vol. II, No. 4.

Stevin, Simon (1585), *L' Arithmétique et la Pratique d'Arithmétique. Les Œuvres Mathématiques* (1634) ed. A. Girard, Leyde.

Waldegg, G. (1993) : « La notion du nombre avant l'établissement de la science analytique ». *Actes de la première université d'Été Histoire et Épistémologie dans l'éducation mathématique*, Montpellier .